

**III. FELADAT (30p)**

Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény.

**5p** a) Mutassátok ki, hogy az  $f$  függvény bármely primitívje szigorúan növekvő a  $(0, +\infty)$  intervallumon.

**5p** b) Számítsátok ki  $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} f^2(x) dx$ .

**5p** c) Mutassátok ki, hogy  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$ , bármely  $x, y \geq 0$  esetén.

**5p** d) Számítsátok ki  $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ .

**5p** e) Mutassátok ki, hogy  $f(x) \leq \frac{x+1}{2}$ , bármely  $x > 0$  esetén.

**5p** f) Felhasználva esetleg az e) pontban lévő egyenlőtlenséget, bizonyítsátok be, hogy

$$\int_0^{2009} f(x) dx \leq \frac{2010^2 - 1}{4}.$$