

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 1$ függvény.

- 5p** a) Mutassátok ki, hogy az f függvény bármely F primitívje növekvő az \mathbb{R} -en.
- 5p** b) Számítsátok ki $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Határozzátok meg az f függvény egy F primitívjét, amelyre $F(0) = 0$.
- 5p** d) Bizonyítsátok be, hogy $f^2(x) \geq 2^{x+2}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 5p** e) Számítsátok ki $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p** f) Felhasználva esetleg a **d**) pontot, bizonyítsátok be, hogy $\int_{-2}^0 f^2(x) dx > \frac{3}{\ln 2}$.