

**III . FELADAT (30p)**

Adottak az  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-1}{2x}$  és  $g(x) = \frac{2x}{2x+1}$  függvények.

- 5p** a) Számítsátok ki  $\int_2^4 f(x) dx$ .
- 5p** b) Számítsátok ki  $\int_0^2 (4x^2 - 1) \cdot g(x) dx$ .
- 5p** c) Határozzátok meg az  $f$  függvény egy  $F$  primitívjét, amelyre  $F(1) = 0$ .
- 5p** d) Mutassátok ki, hogy  $f(x) < g(x)$ , bármely  $x > 0$  esetén.
- 5p** e) Mutassátok ki, hogy a  $g$  függvény bármely  $G$  primitívje növekvő a  $(0, +\infty)$  intervallumon.
- 5p** f) Felhasználva esetleg a **d)** pontot, mutassátok ki, hogy  $\int_1^{2009} \frac{2x}{2x+1} dx \geq 2008 - \frac{1}{2} \ln 2009$ .