

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ függvény.

- 5p** a) Számítsátok ki $\int x f(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.
- 5p** b) Számítsátok ki $\int_1^2 x^2 f(x) dx$.
- 5p** c) Mutassátok ki, hogy $f(x) \geq \frac{3}{x}$, bármely $x > 0$ esetén.
- 5p** d) Számítsátok ki $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.
- 5p** e) Számítsátok ki $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f'(x) dx$.
- 5p** f) Bizonyítsátok be az $\int_{41}^{2009} f(x) dx \geq 6 \ln 7$ egyenlőtlenséget.