

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $f(x) = \ln x$ és az $I_n = \int_1^e x^n \ln x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ integrálok.

5p a) Számítsátok ki $\int_2^4 \frac{1}{x} \, dx$.

5p b) Felhasználva a parciális integrálás módszerét, mutassátok ki, hogy $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

5p c) Mutassátok ki, hogy $x^n \ln x \leq e^n \ln x$, bármely $x \in [1, e]$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p d) Számítsátok ki I_1 .

5p e) Mutassátok ki, hogy $I_n = \frac{n \cdot e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p f) Felhasználva esetleg a c) pontot, bizonyítsátok be, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesül az $ne^{n+1} + 1 \leq e^n (n+1)^2$ egyenlőtlenség.