

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ függvény.

5p a) Bizonyítsátok be, hogy $f(x) \geq 2$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén .

5p b) Számítsátok ki $\int_{-1}^3 |x| f(-1) f(3) dx$.

5p c) Határozzátok meg azt a legkisebb m természetes számot, amelyre $\int_{-1}^1 [f^2(1-x) - 4] dx < m$.

5p d) Mutassátok ki, hogy $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x-2}{f^2(x)-5} dx \in \mathbb{N}$.

5p e) Felhasználva esetleg az **a)** pontot, bizonyítsátok be az $\int_a^b f^2(x) dx \geq 4(b-a)$, egyenlőtlenséget,
bármely $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ esetén.

5p f) Számítsátok ki az f függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogatát, ha $x \in [-1, 1]$.