

**III. FELADAT (30p)**

Adottak az  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  és  $g(x) = x$  függvények.

- 5p** a) Bizonyítsátok be, hogy az  $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = g(x)[f(x) - 1]$  függvény az  $f$  függvénynek egy primitívje.
- 5p** b) Határozzátok meg az  $f$  függvénynek azt a primitívjét, amely grafikus képe átmegy az  $A(1, 2)$  ponton.
- 5p** c) Mutassátok ki, hogy nem létezik  $n \in \mathbb{Z}$ , amelyre  $\int_n^{n+1} g(x) dx \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** d) Számítsátok ki  $\int_1^e f(x)g(x)dx$ .
- 5p** e) Számítsátok ki  $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{g(x)} dx$ .
- 5p** f) Bizonyítsátok be, hogy bármely  $x \in (1, +\infty)$  esetén teljesül az  $\int_1^x [g(t) - f(t)] dt \geq x - 1$  egyenlőtlenség.