

III . FELADAT (30p)

Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ függvény.

5p a) Számítsátok ki $\int x^3 f(x) dx$

5p b) Számítsátok ki $\int_1^e f(x) dx$

5p c) Mutassátok ki, hogy létezik $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\int_1^n x^2 f(x) dx = 8$

5p d) Legyen F az f függvény egy primitívje. Határozzátok meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét, amelyre az $x_0 = 2$ abszcisszájú pontban az F függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az $mx - y + 2 = 0$ egyenletű egyenessel

5p e) Számítsátok ki $\int_1^e f(x) \ln x dx$.

5p f) Felhasználva esetleg az $x^2 - x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenséget, amely igaz bármely x valós szám esetén, bizonyítsátok be, hogy $\int_a^{a+1} f(x) dx \leq 1$, $\forall a \in \mathbb{N}^*$.