

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvény.

- 5p** a) Bizonyítsátok be, hogy az f függvény bármely primitívje csökkenő a $(-1, 3)$ intervallumon .
- 5p** b) Határozzátok meg az f függvénynek azt a primitívjét , amelynek grafikus képe átmegy az xOy koordináta-rendszer kezdőpontján .
- 5p** c) Számítsátok ki $\int_{-1}^3 |x| f(x) dx$.
- 5p** d) Mutassátok ki, hogy létezik $m \in \mathbb{Z}^*$, amelyre $\int_0^m f(x) dx \in \mathbb{Z}$.
- 5p** e) Felhasználva esetleg az $f(x) \geq -4$ igaz egyenlőtlenséget, amely igaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, bizonyítsátok be, hogy $\int_u^v f(x) dx \geq 4(u - v)$, bármely $u, v \in \mathbb{R}$, $u \leq v$ esetén.
- 5p** f) Számítsátok ki $\int_0^1 \frac{e^x f(x)}{x+1} dx$.