

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (1-x)^2$ függvény.

5p a) Határozzátok meg $\int f(x)dx$.

5p b) Számítsátok ki $\int_{-1}^1 [f(1-x) + f(x) + 1] \cdot |x| dx$.

5p c) Határozzátok meg az f függvénynek azt a primitívjét, amelynek grafikus képe átmegy az xOy koordináta-rendszer kezdőpontján.

5p d) Bizonyítsátok be, hogy az f függvény bármely primitívje csökkenő a $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ intervallum bármely részintervallumán.

5p e) Bizonyítsátok be, hogy az $\int_{-1}^1 (2x^3 + 1)f(x^3)dx$ határozott integrál értéke hozzátartozik a $[-1, 0]$ intervallumhoz.

5p f) Számítsátok ki az f függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogatát, ha $x \in [-1, 1]$.