

III. FELADAT (30p)

Adottak az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $g(x) = 1 - x^4$ függvények.

- 5p** a) Bizonyítsátok be, hogy $(1-x)f(x) = g(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 5p** b) Határozzátok meg az f függvénynek azt a primitívjét, amely grafikus képe átmegy az xOy koordináta-rendszer kezdőpontján.
- 5p** c) Számítsátok ki $\int_{-1}^1 g(2x)|x| dx$
- 5p** d) Számítsátok ki $\int_{-1}^1 \sqrt{1-g(x)} dx$.
- 5p** e) Ha a G a g függvény egy primitívje, akkor mutassátok ki, hogy $G(3) \geq G(4)$.
- 5p** f) Határozzátok meg azt a legkisebb k egész számot, amelyre $\int_{-1}^1 [f(x^4) + g(x^3)] dx \leq k$.