III. FELADAT (30p)

Adott az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ függvény.

5p **a)** Határozzátok meg az f függvénynek azt a primitívjét, amely grafikus képe az abszcissza tengelyt az $x=1$ pontban metszi.

5p **b)** Bizonyítsátok be, hogy $u+\frac{1}{u}\geq 2, \forall u\in(0,+\infty)$ esetén.

5p **c)** Mutassátok ki, hogy $\int_1^{\sqrt{2009}} f(e^{2009x})dx\in\mathbb{N}$.

5p **d)** Számítsátok ki $\int_1^2 f(\frac{1}{x})dx$.

5p **e)** Felhasználva esetleg a **b)** pontot, bizonyítsátok be, hogy $\int_a^b\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dx\geq 2(b-a)$, bármely $a,b\in\mathbb{R}, 1<a\leq b$ esetén.

5p **f)** Számítsátok ki $\int_{e^{-1}}^{e^2}\frac{f(x)}{x}dx$.