

**III. FELADAT (30p)**

Adottak az  $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ,  $g(x) = x - \frac{1}{x^3}$  függvények.

- 5p** a) Bizonyítsátok be, hogy  $(x-1)f(x) = g(x)$ .
- 5p** b) Mutassátok ki, hogy az  $f$  függvény bármely primitívje növekvő a  $(0, \infty)$  intervallumon.
- 5p** c) Határozzátok meg az  $f$  függvénynek azt a primitívjét, amelynek grafikus képe tartalmazza az  $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$  pontot.
- 5p** d) Számítsátok ki  $\int_1^2 x^3 f(x) dx$ .
- 5p** e) Bizonyítsátok be az  $\int_a^b g(x) dx \geq 0$  egyenlőtlenséget, bármely  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq a \leq b$  esetén.
- 5p** f) Számítsátok ki  $\int_1^e g\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .