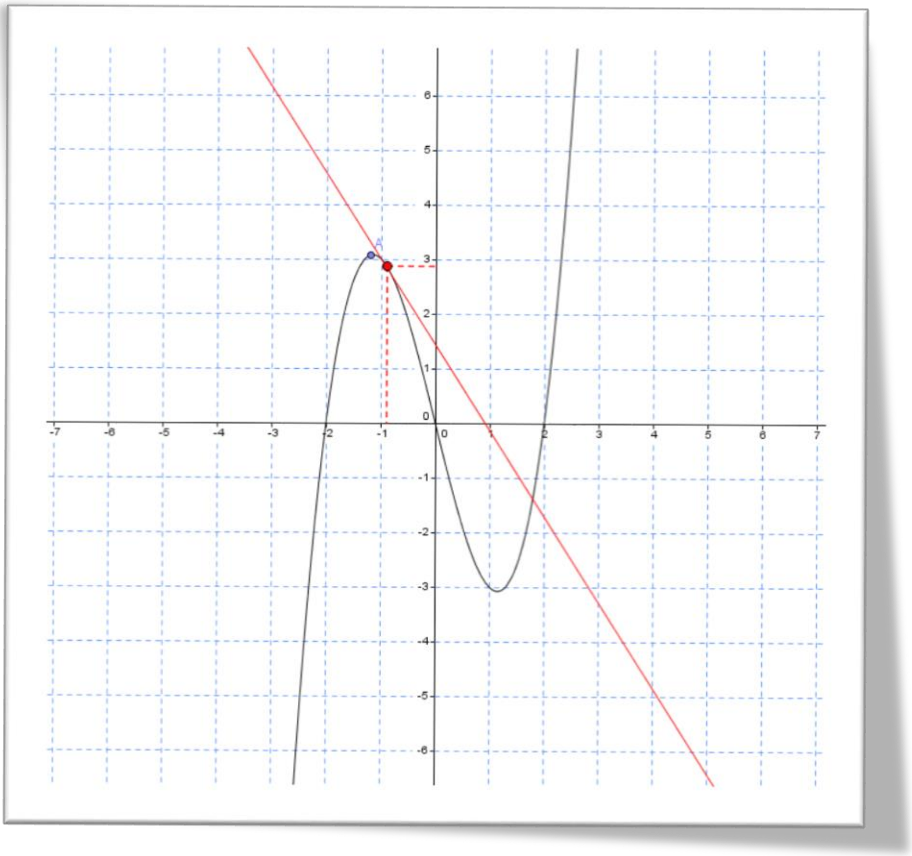
Prof. Báthori Éva, Prof. Betuker Enikő, Prof. Gyulai Andrea,
Prof. István Zoltán, Prof. Nagy Olga, Prof. Pálhegyi-Farkas László

ÉRETTSÉGI SEGÉDANYAG

MATEMATIKA M3

TECHNOLÓGIAI SZAKOSZTÁLYOK RÉSZÉRE



2015
ORADEA

ISBN 978-973-0-18541-6

Autori:

Prof. Báthori Éva Liceul Teoretic "Ady Endre" Oradea
Prof. Betuker Enikő Liceul Teoretic " Horváth János" Marghita
Prof. Nagy Olga Liceul Teoretic "Arany János" Salonta
Prof. Gyulai Andrea Colegiul Național "Mihai Eminescu" Oradea
Prof. István Zoltán Liceul Teoretic "Ady Endre" Oradea
Prof. Pálhegyi-Farkas László Colegiul Național "Mihai Eminescu" Oradea

Coordonatori:

Prof. Kéry Hajnal, Inspector Școlar General Adjunct IȘJ Bihor,
Prof. Zsigó Tamás, Inspector de Specialitate, IȘJ Bihor,
Prof. István Zoltán Liceul Teoretic "Ady Endre" Oradea

Îndrumător metodic pentru disciplina matematică – nivel liceal în limba maghiară, avându-se în vedere competenţele specifice şi conţinuturile obligatorii necesare pentru atingerea unei note de trecere la evaluare

9. osztály

1. Fejezet: Valós számok

Műveletek tizedes törtekkel

Közönséges törtet osztással alakítjuk át tizedes törtté.
Példa:

$$\frac{7}{25} = 7:25 = 0{,}28$$

A véges tizedes törtet ahogy (helyesen) kiolvassuk, úgy írjuk le törtvonallal, majd egyszerűsítünk, ha lehet.
Példa:

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$1{,}024 = 1\frac{24}{1000} = 1\frac{3}{125} = \frac{1 \cdot 125 + 3}{125} = \frac{128}{125}$$

Tiszta szakaszos tizedes törtet a következőképpen alakítjuk át:
- a tört számlálójába írjuk a szakaszt,
- a nevezőbe annyi 9-est írunk, ahány számjegyből áll a szakasz,
- ha lehet, egyszerűsítünk.
Példa:

$$0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0,(23) = \frac{23}{99}$$

$$1,(213) = 1\frac{213}{999} = 1\frac{71}{333} = \frac{1 \cdot 333 + 71}{333} = \frac{404}{333}$$

Vegyes szakaszos tizedes törtet a következőképpen alakítjuk át:
A számlálóba leírjuk a szakasz előtti számjegyekből és a szakaszból alkotott számot, ebből kivonjuk a nem ismétlődő számjegyekből alkotott számot.
A nevezőbe annyi 9-est írunk, ahány számjegyből áll a szakasz; utána annyi 0-t, ahány számjegyből áll a nem ismétlődő rész.
Ha lehet, egyszerűsítünk.
Példa:

$$0{,}3(18) = \frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$$

$$2{,}91(6) = 2\frac{916 - 91}{900} = 2\frac{825}{900} = 2\frac{11}{12} = \frac{2 \cdot 12 + 11}{12} = \frac{35}{12}$$

Megjegyzés. Ha egy műveletsorban közönséges tört és tizedes tört is szerepel, a tizedes törteket átalakítva végezzük el a műveleteket.

Begyakorló példák megoldással

1. Számítsd ki: $0{,}2(8) + 0{,}1(7) + 1,(6)$.

Megoldás:

Minden tizedes törtet átalakítunk közönséges törté:

$$0{,}2(8) + 0{,}1(7) + 1,(6) = \frac{28-2}{90} + \frac{17-1}{90} + 1\frac{6}{9} = \frac{26}{90} + \frac{16}{90} + 1\frac{6}{9} =$$

$$= \frac{26}{90} + \frac{16}{90} + \frac{1\cdot 9 + 6}{9} = \frac{36}{90} + \frac{15}{9} = \frac{36}{90} + \frac{150}{90} = \frac{186}{90} = \frac{62}{30} = \frac{31}{15}$$

2. Számítsd ki: $\left(14\frac{2}{5} - 2{,}4\right) : 0{,}3$.

Megoldás:

Bevisszük az egészet a törtbe (a számlálóba: a nevezőt szorozzuk az egész résszel, majd hozzáadjuk a számlálót, a nevező marad változatlanul), átalakítjuk a tizedes törteket.

Tört osztása törttel: az osztandót (az első törtet) megszorozzuk az osztó (második tört) inverzével (fordítottjával).

$$\left(14\frac{2}{5} - 2{,}4\right) : 0{,}3 = \left(\frac{14\cdot 5 + 2}{5} - 2\frac{4}{10}\right) : \frac{3}{10} = \left(\frac{62}{5} - 2\frac{2}{5}\right) : \frac{3}{10} = \left(\frac{62}{5} - \frac{2\cdot 5 + 2}{5}\right) : \frac{3}{10} =$$

$$= \left(\frac{62}{5} - \frac{12}{5}\right) \cdot \frac{10}{3} = \frac{50}{5} \cdot \frac{10}{3} = 10 \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{3}$$

3. Számítsd ki: $\left[6,(5) - \frac{4}{15} + 0{,}25\right] : \frac{3}{8}$.

Megoldás:

$$\left[6,(5) - \frac{4}{15} + 0{,}25\right] : \frac{3}{8} = \left(6\frac{5}{9} - \frac{4}{15} + \frac{25}{100}\right) : \frac{3}{8} = \left(\frac{6\cdot 9 + 5}{9} - \frac{4}{15} + \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{8} =$$

$$= \left(\frac{59}{9} - \frac{4}{15} + \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{8} =$$

A zárójelben levő törtek közös nevezője a nevezők legkisebb közös többszöröse lesz, ami ebben az esetben 180. Az első törtet bővítjük 20-szal, a másodikat 12-vel, a harmadikat 45-tel.

$$= \left(\frac{118}{180} - \frac{48}{180} + \frac{45}{180}\right) : \frac{3}{8} = \frac{115}{180} \cdot \frac{8}{3} = \frac{23}{36} \cdot \frac{8}{3} = \frac{23}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{46}{27}$$

4. Határozd meg a 0,(312546) szám 2014-edik tizedes számjegyét.

Megoldás:

Az ilyen típusú feladatoknál a következőképpen járunk el: ahányadik számjegyet kell kiszámolni, azt a számot osztjuk az ismétlődő számjegyek számával. A maradék mondja meg, hogy az ismétlődő számjegek közül hányadik lesz a keresett számjegy.

Észre kell venni, hogy ugyanaz a 6 számjegy ismétlődik. 2014-et elosztjuk 6-tal, hányados 335, maradék 4. A maradékos osztás tétele alapján $2014 = 335 \cdot 6 + 4$. ami azt jelenti, hogy az első 2014 tizedes számjegyben az ismétlődő 6 számjegy 335-ször jelenik meg, és még 4 számjegy. Vagyis a 2014-edik számjegy ebben az esetben az 5.

5. Határozd meg 0,(7692301) szám 2015-ödik tizedes számjegyét.

Megoldás:

Ugyanúgy járunk el, mint az előző feladatnál. 2015-öt elosztva 7-tel (mert 7 ismétlődő számjegy van), maradékul 6-ot kapunk.

$$2015 = 287 \cdot 7 + 6$$

Vagyis a 2015-ödik tizedes számjegy az ismétlődő számjegyek közül a hatodik, azaz a 0 lesz.

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Számítsd ki: $3{,}625 + 0{,}25 + 2\frac{3}{4}$.

Eredmény: 2.

2. Számítsd ki: $\left[2\frac{1}{3} + 0,(3) + 0{,}75\right] : 9$.

Eredmény: $\frac{41}{108}$.

3. Számítsd ki: $\left(12\frac{4}{5} - 4{,}2\right) : 0{,}4$.

Eredmény: $\frac{43}{2}$.

4. Számítsd ki: $\left(1\frac{1}{4} - 0{,}725\right) : 0{,}5$.

Eredmény: $\frac{41}{40}$.

5. Számítsd ki: $\left(0{,}45 + 2\frac{1}{2}\right) : 0{,}8$.

Eredmény: $\frac{59}{16}$.

6. Számítsd ki: $\left(1\frac{1}{8} + 0{,}175\right) : 0{,}0(4)$.

Eredmény: $\frac{117}{4}$.

7. Számítsd ki: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Eredmény: 1.

8. Határozd meg 0,(763241) szám 2015-ödik tizedes számjegyét .

Eredmény: 4.

9. Határozd meg 0,(1234567) szám 2015-ödik tizedes számjegyét.

Eredmény: 6.

10. Határozd meg 0,(20957) szám 2014-edik tizedes számjegyét.

Eredmény: 5.

11. Határozd meg a 2,(876543) szám 2015-ödik tizedes számjegyét.

Eredmény: 4.

12. Határozd meg az 1,(9786543) szám 2015-ödik tizedes számjegyét.

Eredmény: 4.

Valós számok egész kitevőjű hatványai

Ha $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, akkor $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n-szer}$

Ha $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$, akkor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. (Egy valós szám negatív hatványa egyenlő a szám reciprokával – felcseréljük a számlálót a nevezővel.)

Példák:

$$6^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{1}{6}$$

$$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

Ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, akkor $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Begyakorló példák megoldással

1. Számítsd ki: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

Megoldás:
Először a hatványozásokat végezzük el majd közös nevezőre hozással összeadjuk a törteket.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

2. Számítsd ki: $1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}$.

Megoldás:
A negatív hatványok értelmezését felhasználva

$$1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}$$

3. Igazold, hogy $4^{-1} + 4^{-2} = 0{,}3125$

Megoldás:

$$4^{-1} + 4^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 5:16 = 0{,}3125$$

4. Számítsd ki: $3^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

Megoldás:

$$3^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} + \frac{9}{1} = \frac{1}{9} + \frac{81}{9} = \frac{82}{9}$$

5. $a = 3$-ra igazold, hogy $\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{-1} = \frac{5}{6}$.

Megoldás:
Első lépésben az a helyére behelyettesítjük a 3-at, majd használjuk a negatív hatvány értelmezését. Közös nevezőre hozva a törteket, és elvégezve a számításokat megkapjuk a kért eredményt.

$$\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{-1} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Számítsd ki: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}$.

Eredmény: $\frac{21}{16}$.

2. Számítsd ki: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}$.

Eredmény: $\frac{91}{81}$.

3. Igazold, hogy $1^{-1}+5^{-1}=1{,}2$.
4. Igazold, hogy $2^{-1}-2^{-2}=0{,}25$.
5. Igazold, hogy $5+5^{-1}=5{,}2$.
6. Számítsd ki: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$.

Eredmény: $\frac{20}{27}$.

7. $a=3$-ra igazold, hogy $\frac{5}{a}-\left(\frac{5}{a}\right)^{-1}=\frac{16}{15}$.
8. $a=5$-re igazold, hogy $\frac{1}{a}+a^{-1}=\frac{2}{5}$.
9. Számítsd ki: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+2^4$.
Eredmény: 20.

10. $a=2$-re, számítsd ki: $a^{-1}+a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$
Eredmény: $\frac{13}{2}$.

Valós szám négyzetgyöke. Köbgyök. Műveletek gyökmennyiségekkel.

Egy *a* pozitív, legfeljebb 0 szám négyzetgyöke az az *x* nemnegatív valós szám, melynek négyzete egyenlő *a*-val.

$$\sqrt{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{x}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}\geq \mathbf{0},\boldsymbol{x}\geq \mathbf{0})$$

Ha $a\geq 0, b\geq 0$, érvényesek a következő tulajdonságok:

Szorzás: $\sqrt{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}}=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$, például $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}}=\boldsymbol{a}$, például $\sqrt{3^2}=3, \sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

Osztás: $\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}, \boldsymbol{b}\neq \mathbf{0}$, például $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{100}{4}}=\sqrt{25}=5$

Tényező kiemelése a gyökjel alól: Ha $a\geq 0, b\geq 0$, akkor $\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\cdot\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}}$

Például: $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=\sqrt{3^2\cdot 3}=3\sqrt{3}$

Tényező bevitele a gyökjel alá: Ha $a\geq 0, b\geq 0$, akkor $\boldsymbol{a}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\cdot\boldsymbol{b}}$

Például: $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$

Egy *a* valós szám köbgyöke (harmadrendű gyöke) az az *x* valós szám, melynek köbe (harmadik hatványa) megegyezik *a*-val.

$$\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{x}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}=\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$$

Például: $\sqrt[3]{27}=3$, mert $3^3=27$; $\sqrt[3]{-8}=-2$, mert $(-2)^3=-8$

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, érvényesek a következő tulajdonságok:

Szorzás: $\sqrt[3]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$, például $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$

$\sqrt[3]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{3}}} = \boldsymbol{a}$, például $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$, $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

Osztás: $\frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{b}}} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, például $\frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{125}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Tényező kiemelése a gyökjel alól: Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\sqrt[3]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{3}} \cdot \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{b}}$

Például: $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

Tényező bevitele a gyökjel alá: Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\boldsymbol{a} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{3}} \cdot \boldsymbol{b}}$

Például: $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

Összeadni és kivonni (összevonni) csak egynevű gyökmennyiségeket lehet. (Egynevűek azok a gyökmennyiségek, melyekben a gyök alatti mennyiségek azonosak.) Összevonás előtt tényező kiemelésével próbálunk egynevű gyökmennyiségeket kialakítani.

A négyzetgyökök, köbgyökök szorzása és osztása a fentebb említett tulajdonságok alapján történik.

Begyakorló példák megoldással

1. Igazoljuk, hogy $4(3 + 2\sqrt{3}) - 8\sqrt{3} = 12$
Megoldás:
A zárójel előtti 4-el beszorozzuk a zárójelben lévő mindkét tagot, majd összevonjuk az egynevű tagokat.

$$4(3 + 2\sqrt{3}) - 8\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 12$$

2. Igazoljuk, hogy $2(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{8}$ természetes szám.
Megoldás:
A feladat, bár másképp hangzik, mint az előző, mégis ugyanabba a típusba tartozik. Különbség annyi, hogy ebben az esetben nincs megadva az eredmény, azt nekünk kell kiszámolni.
Észrevesszük még, hogy a 8 egy olyan összetett szám, melynek gyökéből tényezőt emelhetünk ki a gyökjel elé.
$2(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{8} = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{N}$, vagyis a kapott eredmény természetes szám.

3. Igazold, hogy $6(\sqrt{5} + 2) + 2(1 - 3\sqrt{5}) = 14$.
Megoldás:
A zárójelekben levő minden tagot megszorzunk a zárójel előtti számmal, majd összevonjuk az egynevű tagokat:

$$6(\sqrt{5} + 2) + 2(1 - 3\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 12 + 2 - 6\sqrt{5} = 14$$

4. Igazoljuk, hogy $4\sqrt{2} + \sqrt[3]{8} - \sqrt{32} = 2$.
Megoldás:
A négyzetgyök alól tényezőt emelünk ki, elvégezzük a lehetséges gyökvonásokat, majd összevonjuk az egynevű tagokat:

$$4\sqrt{2} + \sqrt[3]{8} - \sqrt{32} = 4\sqrt{2} + 2 - \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 2 - \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 2 - \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2} =$$
$$= 4\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 2$$

5. Igazold, hogy $\sqrt[3]{27} - \sqrt{48} + 4\sqrt{3}$ egész szám.
Megoldás:

A 27-ből köbgyököt vonunk, a négyzetgyöknél kiemelünk tényezőt a gyökjel elé, majd összevonjuk az egynevű tagokat:

$$\sqrt[3]{27}-\sqrt{48}+4\sqrt{3}=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt{16\cdot 3}+4\sqrt{3}=3-\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}+4\sqrt{3}=3-\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{3}+4\sqrt{3}=$$
$$=3-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=3\in\mathbb{Z}$$

6. Számítsd ki: $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$.

Megoldás:

Használjuk a valós számok negatív hatványára vonatkozó értelmezést, köbgyököt vonunk, majd összevonjuk az egynevű tagokat.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{4}{5}-\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{4}{5}-\frac{\sqrt[3]{4^3}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}=0$$

7. Igazold, hogy $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}-\sqrt{\frac{9}{4}}$ természetes szám.

Megoldás:

A gyökökre vonatkozó tulajdonságok alapján indulunk el:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3}}-\frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0\in\mathbb{N}$$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Számítsd ki: $5\sqrt{2}+5\left(2-\sqrt{2}\right)$.
Eredmény: 10

2. Igazold, hogy $\sqrt{8}+2-2\sqrt{2}$ természetes szám.
Eredmény: 2.

3. Igazold, hogy $2\left(\sqrt{3}+3\right)-2\sqrt{3}$ természetes szám.
Eredmény: 6.

4. Számítsd ki: $5\left(3-2\sqrt{2}\right)+\sqrt{200}$.
Eredmény: 15.

5. Igazold, hogy $3\sqrt{3}-\sqrt{27}+5$ természetes szám.
Eredmény: 5

6. Igazold, hogy $\sqrt[3]{125}-\sqrt{24}+2\sqrt{6}$ természetes szám.
Eredmény: 5.

7. Számítsd ki: $2\left(\sqrt{100}-\sqrt{7}\right)+2\sqrt{7}-10$.
Eredmény: 10.

8. Igazold, hogy $\sqrt{9}+\sqrt[3]{27}+2\sqrt{3}-\sqrt{12}$ természetes szám.
Eredmény: 6.

9. Igazold, hogy $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ természetes szám.

Eredmény: 0.

10. Számítsd ki: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}-\sqrt{\frac{25}{4}}+10$.

Eredmény: 10.

11. Igazold, hogy $\sqrt{\frac{81}{16}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2}-5$ egész szám.

Eredmény: -5.

Rövidített számítási képletek

Bármilyen a, b, c valós számok esetén fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\mathbf{1.}\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Például: $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\mathbf{2.}\quad (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Például: $\left(\sqrt{5}-2\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2 + 2^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$

$$\mathbf{3.}\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

Például: $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

Begyakorló példák megoldással

1. Igazold, hogy $\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ természetes szám.

Megoldás:

Alkalmazzuk az első és második rövidített számítási képletet (mindkettőben $a = 1, b = \sqrt{3}$), majd összevonjuk az egynevű tagokat. Mivel a két zárójel között összeadás szerepel, emiatt a zárójeleket elhagyhatjuk:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 8 \in \mathbb{N}$$

2. Igazold, hogy $\left(3+\sqrt{2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 12\sqrt{2}$.

Megoldás:

Alkalmazzuk az első és második rövidített számítási képletet (mindkettőben $a = 3, b = \sqrt{2}$). Figyelnünk kell arra, hogy a második zárójel előtt kivonás van, ami majd megváltoztatja a zárójelben levő tagok előjelét. A zárójel felbontása után összevonjuk az egynevű tagokat:

$$\left(3+\sqrt{2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(3^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) =$$

$$= 9 + 6\sqrt{2} + 2 - \left(9 - 6\sqrt{2} + 2\right) = 11 + 6\sqrt{2} - \left(11 - 6\sqrt{2}\right) = 11 + 6\sqrt{2} - 11 + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

3. Igazold, hogy $\left(\sqrt{7}-2\right)^2 + 4\sqrt{7} = 11$.

Megoldás:

A második rövidített számítási képletet alkalmazzuk, a helyére $\sqrt{7}$-et, míg b helyére 2-t helyettesítünk. Az egynevű tagok összevonása után megkapjuk a kért eredményt.

$$\left(\sqrt{7}-2\right)^2 + 4\sqrt{7} = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{7}\cdot 2 + 2^2 + 4\sqrt{7} = 7 - 4\sqrt{7} + 4 + 4\sqrt{7} = 11$$

4. Igazold, hogy $\left(4+\sqrt{5}\right)\cdot\left(4-\sqrt{5}\right) - 6$ természetes szám.

Megoldás:

A harmadik rövidített számítási képletet alkalmazzuk, melyben most *a* helyére 4-et, *b* helyére $\sqrt{5}$-öt helyettesítünk:

$$\left(4+\sqrt{5}\right)\cdot\left(4-\sqrt{5}\right)-6=4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2-6=16-5-6=5\in\mathbb{N}$$

5. Igazold, hogy $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{24}$ természetes szám.

Megoldás:

Az első rövidített számítási képletben *a* helyére $\sqrt{3}$-t, *b* helyére $\sqrt{2}$-t helyettesítünk. azt is észre kell venni, hogy a $\sqrt{24}$-ből tényezőt lehet kiemelni a gyökjel elé:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{24}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{4\cdot 6}=3+2\sqrt{3\cdot 2}+2-\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=$$
$$=3+2\sqrt{6}+2-2\sqrt{6}=5$$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Igazold, hogy $\left(\sqrt{11}+2\right)^2+\left(\sqrt{11}-2\right)^2$természetes szám.

Eredmény: 30.

2. Igazold, hogy $\left(5-\sqrt{3}\right)^2+\left(5+\sqrt{3}\right)^2$ természetes szám.

Eredmény: 56

3. Igazold, hogy $8\sqrt{2}+\left(4-\sqrt{2}\right)^2$ természetes szám.

Eredmény: 18

4. Számítsd ki: $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{3}$.

Eredmény: 8.

5. Igazold, hogy $\left(3-\sqrt{2}\right)^2+\left(3+\sqrt{2}\right)^2=22$.
6. Igazold, hogy $\left(\sqrt{13}-3\right)\cdot\left(\sqrt{13}+3\right)+6=10$.
7. Igazold, hogy $\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)-1$ természetes szám.

Eredmény: 0.

8. Számítsd ki: $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\sqrt{20}$.

Eredmény: 6.

9. Számítsd ki: $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2$.

Eredmény: 20.

10. Igazold, hogy $\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)^2$ természetes szám.

Eredmény: 30.

Valós számok rendezése

Bármely két valós számot össze lehet hasonlítani.

Két valós szám közül az a nagyobb, amelyik a számegyenesen a másikhoz képest jobb felől helyezkedik el.

Begyakorló példák megoldással

1. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $(-3)^2$, $\sqrt[3]{27}$ és $\sqrt{25}$.

Megoldás:

Elvégezzük a hatványozásokat, a gyökvonásokat:

$(-3)^2 = 9$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt{25} = 5$

$3 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt{25} < (-3)^2$

2. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, 16 és $\sqrt[3]{8}$.

Megoldás:

Elvégezzük a hatványozást és a gyökvonást:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$2 < 4 < 16 \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < 16$$

3. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $\sqrt[3]{-27}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ és $\sqrt{36}$.

Megoldás:

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{2} = 3^2 = 9$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$-3 < 6 < 9 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} < \sqrt{36} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

4. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{-125}$ és $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

Megoldás:

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{1}\right)^{2} = 5^2 = 25$$

$$25 > 5 > -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} > \sqrt{25} > \sqrt[3]{-125}$$

5. Rendezd csökkenő sorrendbe a $\sqrt[3]{64}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ és $\sqrt{100}$ számokat.

Megoldás:

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3} = 2^3 = 8$$

$\sqrt{100} = 10$

$10 > 8 > 4 \Rightarrow \sqrt{100} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} > \sqrt[3]{64}$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: 2^3, $\sqrt[3]{8}$ és $\sqrt{16}$.
Eredmény: $\sqrt[3]{8} < \sqrt{16} < 2^3$

2. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\sqrt[3]{-8}$ és $(-2)^2$.
Eredmény: $\sqrt[3]{-8} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < (-2)^2$

3. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $\sqrt{25}$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$ és $\sqrt[3]{64}$.
Eredmény: $\sqrt[3]{64} < \sqrt{25} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

4. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, 17 és $\sqrt[3]{125}$.
Eredmény: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \sqrt[3]{125} < 17$

5. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $\sqrt{100}$, $(-3)^2$ és $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.
Eredmény: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} < (-3)^2 < \sqrt{100}$

6. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$, $\sqrt[3]{27}$ és 8.
Eredmény: $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} > 8 > \sqrt[3]{27}$

7. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$, $\sqrt{81}$ és 7.
Eredmény: $\sqrt{81} > 7 > \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

8. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt{49}$ és $(-1)^4$.
Eredmény: $\sqrt{49} > \sqrt[3]{125} > (-1)^4$

9. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $(-4)^2$ és $\sqrt{100}$.
Eredmény: $\sqrt{100} > (-4)^2 > \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

10. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $\sqrt[3]{64}$, $\left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$ és $\sqrt{64}$.
Eredmény: $\left(\frac{1}{64}\right)^{-1} > \sqrt{64} > \sqrt[3]{64}$

Intervallumok. Műveletek intervallumokkal.

Zárt intervallum: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

Nyílt intervallum: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

Balról zárt, jobbról nem korlátos intervallum: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

Balról nyílt, jobbról nem korlátos intervallum: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$

Balról nem korlátos, jobbról zárt intervallum: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

Balról nem korlátos, jobbról nyílt intervallum: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

Műveletek intervallumokkal: Legyen *A* és *B* két halmaz.

Egyesítés: $A \cup B = \{x | x \in A \; vagy \; x \in B\}$

Metszet: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$

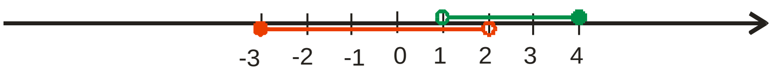
Begyakorló példák megoldással

1. Adottak az $A = [-3, 2)$ és a $B = (1, 4]$ intervallumok. Határozd meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat.

Megoldás:

Az ilyen típusú feladatoknál mindig nagy segítséget nyújt, ha az intervallumokat ábrázoljuk.

Ábrázoljuk mindkét intervallumot ugyanazon a számegyenesen két különböző színnel (piros és zöld). Mivel a két halmaz egyesítése olyan elemeket jelent, amelyek vagy az egyik, vagy a másik halmazban benne vannak, ezért az egyesített halmaz az az intervallum lesz, ahol vagy a piros vagy a zöld szín megjelenik. A halmazok metszete olyan elemeket tartalmaz, amelyek mindkét halmazban benne vannak (közösek), ezért a metszet az a rész lesz a számegyenesen, ahol mindkét szín megjelenik.

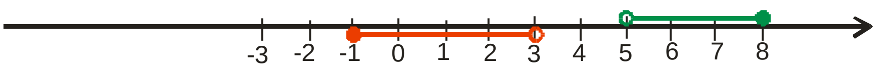


$$A \cap B = (1, 2)$$

$$A \cup B = [-3, 4]$$

2. Adottak az $A = [-1, 3)$ és a $B = (5, 8]$ intervallumok. Határozd meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat.

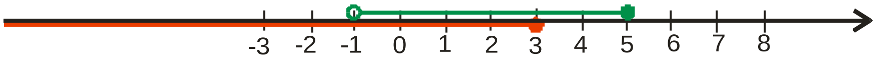
Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonlóan itt is az ábrázolás módszerét választjuk:



Mivel a két intervallumnak nincs közös része (az ábrán nem fedi egymást a két szín), ezért $A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = [-1, 3) \cup (5, 8]$ (az egyesítésüket sem lehet egyetlen halmazként felírni).

3. Adottak az $A = (-\infty, 3]$ és a $B = (-1, 5]$ intervallumok. Határozd meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat.

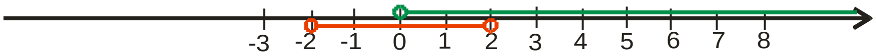
Megoldás: Alkalmazzuk itt is az ábrázolás módszerét:



Mivel $-1 \notin B$, ezért $A \cap B = (-1,3]$. $A \cup B = (-\infty, 5]$

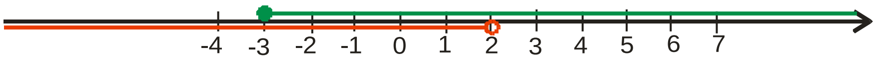
4. Adottak az $C = (-2, 2)$ és a $D = (0, +\infty)$ intervallumok. Határozd meg az $C \cap D$ és $C \cup D$ halmazokat.

Megoldás: Alkalmazva itt is az ábrázolást módszerét, könnyen észrevehető, hogy mivel $0 \notin D$, ezért $C \cap D = (0, 2)$. Mivel $0 \notin D$, de $0 \in C$ ezért $C \cup D = (-2, +\infty)$.



5. Adottak az $E = (-2, 2)$ és a $F = (0, +\infty)$ intervallumok. Határozd meg az $E \cap F$ és $E \cup F$ halmazokat.

Megoldás: Az ábrázolás módszerét alkalmazva észrevesszük, hogy a két szín teljesen lefedi a valós számegyenest, ezért $E \cup F = \mathbb{R}$.



Mivel $2 \notin E$, ezért nem lesz eleme akét halmaz metszetének sem, vagyis $E \cap F = [-3, 2)$.

Javasolt példák eredménnyel.

1. Adottak az $A = [-4, 1)$ és a $B = (0, 3]$ intervallumok. Határozd meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat.

Eredmény: $A \cap B = (0, 1), A \cup B = [-4, 3]$.

2. Adottak az $A = (-6, 0)$ és a $B = [-2, 5)$ intervallumok. Határozd meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat.

Eredmény: $A \cap B = [-2, 0), A \cup B = (-6, 5)$.

3. Adottak a $C = [-3, 0]$ és a $D = (1, 7)$ intervallumok. Határozd meg az $C \cap D$ és $C \cup D$ halmazokat.

Eredmény: $C \cap D = \emptyset, C \cup D = [-3, 0] \cup (1, 7)$.

4. Adottak a $C = (-5, -1)$ és a $D = [0, 2)$ intervallumok. Határozd meg az $C \cap D$ és $C \cup D$ halmazokat.

Eredmény: $C \cap D = \emptyset, C \cup D = (-5, -1) \cup [0, 2)$

5. Adottak az $E = (-\infty, 2)$ és a $F = (0, 6)$ intervallumok. Határozd meg az $E \cap F$ és $E \cup F$ halmazokat.

Eredmény: $E \cap F = (0, 2), E \cup F = (-\infty, 6)$.

6. Adottak az $E = (-\infty, -4)$ és a $F = [-5, 7]$ intervallumok. Határozd meg az $E \cap F$ és $E \cup F$ halmazokat.

Eredmény: $E \cap F = [-5, -4), E \cup F = (-\infty, 7]$.

7. Adottak az $G = (-3, +\infty)$ és a $H = (2, 5)$ intervallumok. Határozd meg az $G \cap H$ és $G \cup H$ halmazokat.

Eredmény: $G \cap H = (2, 5), G \cup H = (-3, +\infty)$.

8. Adottak az $G = [-5, +\infty)$ és a $H = (-7, 3]$ intervallumok. Határozd meg az $G \cap H$ és $G \cup H$ halmazokat.

Eredmény: $G \cap H = [-5, 3], G \cup H = (-7, +\infty)$

9. Adottak az $I = (-\infty, 2)$ és a $J = [0, +\infty)$ intervallumok. Határozd meg az $I \cap J$ és $I \cup J$ halmazokat.

Eredmény: $I \cap J = [0, 2), I \cup J = \mathbb{R}$.

10. Adottak az $I = (-\infty, 1)$ és a $J = [-1, +\infty)$ intervallumok. Határozd meg az $I \cap J$ és $I \cup J$ halmazokat.

Eredmény: $I \cap J = [-1, 1), I \cup J = \mathbb{R}$

Valós szám abszolút értéke (modulusa)

Az *a* valós szám abszolút értékén a következő valós számot értjük:

$$|a| = \begin{cases} a, & ha\ a \geq 0 \\ -a, & ha\ a < 0 \end{cases}$$

Például: $|3| = 3$, $|-2{,}13| = 2{,}13$

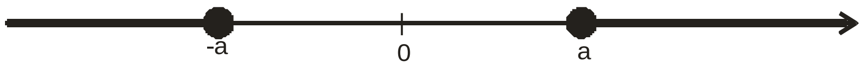
Tulajdonság: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Az $a > 0$ valós szám és az abszolút érték segítségével értelmezhetjük a következő intervallumokat:

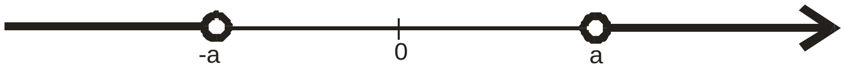
$$[-a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$

$$(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\}$$

$$(-\infty, -a] \cup [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -a \text{ és } x \geq a\}$$



$$(-\infty, -a) \cup (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -a \text{ és } x > a\}$$



Begyakorló példák megoldással

1. Határozd meg az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 1| \leq 1\}$ halmaz elemeit.

Megoldás:

Mivel x természetes szám, emiatt $x - 1$ egész szám lesz. Azok az egész számok, melyeknek abszolút értéke kisebb, vagy egyenlő, mint 1, a $-1, 0, 1$. Ez azt jelenti, hogy a modulusban levő kifejezést sorra egyenlővé kell tegyük ezzel a három számmal (vagyis a feladat visszavezetődik három elsőfokú egyismeretlenes egyenlet megoldására).

$$x - 1 = -1 \Rightarrow x = -1 + 1 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 + 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 \Rightarrow x = 2$$

$$A = \{0, 1, 2\}$$

2. Határozd meg a $B = \{x \in \mathbb{Z} | |2x - 1| < 2\}$ halmaz elemeit.

Megoldás: Mivel $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x - 1 \in \mathbb{Z}$. Azok az egész számok, melyeknek abszolút értéke szigorúan kisebb, mint 2, a $-1, 0, 1$. Az előbbi feladat megoldásához hasonlóan, ez azt jelenti, hogy a $2x - 1$-et sorra egyenlővé kell tennünk e három számmal, megoldanunk a kapott egyenleteket, majd azok megoldásai közül kiválasztani azokat, amelyek egész számok. Ezen x értékek lesznek a B halmaz elemei.

$$2x - 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 0 + 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$B = \{0, 2\}$$

3. Határozd meg a $C = \{x \in \mathbb{N} | |3x + 1| < 3\}$ halmaz elemeit.

Megoldás: Használjuk most az értelmezést:

$$|3x + 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 3x + 1 < 3$$

Két egyenlőtlenséget oldunk meg egyszerre:

$$\begin{cases} -3 < 3x + 1 \\ 3x + 1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < 3x \\ 3x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > -4 \\ 3x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{3} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3}.$$

De tudjuk azt is, hogy $x \in \mathbb{N}$. A $-\frac{4}{3}$ és $\frac{2}{3}$ közötti természetes szám a 0. Vagyis $C = \{0\}$.

Megjegyzés. Az előző két feladatnál használt megoldási módszer is alkalmazható. Mindenki a maga számára könnyebb módszert válassza.

4. Határozd meg a $D = \{x \in \mathbb{Z} | |x + 2| \leq 1\}$ halmaz elemeit.

Megoldás: Használjuk itt is az értelmezést:

$$|x + 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x + 2 \leq 1$$

Megoldjuk az egyenlőtlenségeket:

$$\begin{cases} -1 \leq x + 2 \\ x + 2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 - 2 \leq x \\ x \leq 1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x \leq -1$$

Tudjuk azt is, hogy $x \in \mathbb{Z}$. Ezért $D = \{-3, -2, -1\}$

5. Határozd meg az $E = \{x \in \mathbb{R} | |x - 3| \leq 3\}$ halmaz elemeit.

Megoldás: $|x - 3| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 3 \leq 3$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3 \\ x - 3 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 3 \leq x \\ x \leq 3 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow x \in [0, 6]$$

6. Határozd meg az $F = \{x \in \mathbb{R} | |2x - 3| \geq 5\}$ halmaz elemeit.
Megoldás:

$$|2x - 3| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 5 \\ 2x - 3 \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 8 \\ 2x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

$$F = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Határozd meg az $A = \{x \in \mathbb{N} | |x + 1| \leq 1\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $A = \{0\}$.

2. Határozd meg a $B = \{x \in \mathbb{N} | |3x - 2| < 2\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $B = \{1\}$.

3. Határozd meg a $C = \{x \in \mathbb{N} | |2x + 1| < 3\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $C = \{0\}$.

4. Határozd meg a $D = \{x \in \mathbb{Z} | |2x - 2| = 0\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $D = \{1\}$

5. Határozd meg az $E = \{x \in \mathbb{Z} | |2x + 1| < 3\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $E = \{-1, 0\}$

6. Határozd meg az $F = \{x \in \mathbb{Z}^* | |x + 2| \leq 2\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $F = \{-4, -3, -2, -1\}$.

7. Határozd meg a $G = \{x \in \mathbb{Z}^* | |2x + 1| \leq 3\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $G = \{-2, -1, 1\}$.

8. Határozd meg a $H = \{x \in \mathbb{R} | |x - 3| \leq 2\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $H = [1, 5]$.

9. Határozd meg az $I = \{x \in \mathbb{R} | |x - 2| > 2\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $I = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

10. Határozd meg a $J = \{x \in \mathbb{R} | |x + 5| < 1\}$ halmaz elemeit.

Eredmény: $x \in (-6, -4)$.

2. Fejezet: Az elsőfokú függvény

Az elsőfokú függvény értelmezése, az elsőfokú függvény behelyettesítési értéke

Az $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\quad f\ x\ = ax+b$ függvényt, ahol $a,b\in\mathbb{R}\ \ \textit{és}\ \ a\neq 0$, elsőfokú függvénynek nevezzük.

A függvény $\alpha-$val való behelyettesítési értékét úgy kapjuk meg, hogy az x helyébe az α értékét helyettesítjük be.

Például, ha $f(x)=3x-2$ és $\alpha=-1$, akkor a behelyettesítési érték:
$f(-1)=3\cdot(-1)-2=-3-2=-5$ lesz.

Begyakorló példák megoldással

6. Adott az $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x-2$ függvény. Számítsátok ki $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(5)$.

Megoldás:
Ez a faladat olyan típusú, hogy az egyik tag értéke nulla, ezért a szorzat értéke is nulla. Csak ki kell találni a megfelelő tagot, ez az Ox tengellyel való metszéspont szokott lenni, a mi estünkben az $f(2)=0$.
Tehát $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(5)=0.$

7. Adott az $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=2x-6$ függvény. Számítsátok ki $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(5)$.

Megoldás:
Észrevesszük, hogy $f(3)=2\cdot 3-6=6-6=0$. Tehát $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(5)=0.$

8. Adott az $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x-3$ függvény. Számítsátok ki $f(-10)\cdot f(-9)\cdot f(-8)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

Megoldás:
Összesen 21 függvényérték szorzatáról van szó, de észrevesszük, hogy $f(3)=0$. Tehát
$f(-10)\cdot f(-9)\cdot f(-8)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$

9. Adott az $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x-3$ függvény. Számítsátok ki $f(1)+f(2)+(3)+\ldots+f(5)$.

Megoldás:
Először tanuljuk meg kiszámolni az első n természetes szám összegét. Írjuk le egymás alá az összeadandó tagokat egyszer növekvő, majd csökkenő sorrendben:

$$\begin{matrix} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{matrix}$$ Észrevesszük, hogy minden oszlopban a tagok

összege ugyanaz, vagyis $n+1$, de ilyen párosból pontosan n van, tehát a két sor összege $n\cdot\ n+1$.

Mivel kétszer számoltunk a keresett összeg $\dfrac{n\cdot\ n+1}{2}$. Ezt a képletet meg is lehet tanulni:

$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\ n+1}{2}$. Most oldjuk meg a feladatot:

Ha felírjuk sorra a behelyettesített értékeket formálisan, azaz anélkül, hogy elvégeznénk a számolásokat, kapjuk, hogy:

$f(1)=1-3,\ f(2)=2-3,\ldots,\ f(5)=5-3$, összeadjuk őket úgy, hogy külön csoportosítjuk a szorzatokat, amelyeknek 5 a közös tényezője és külön az egyeseket:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(5)=1+2+\ldots+5\underbrace{-3-3\ldots-3}_{5-ször}=1+2+\ldots+5-15=\frac{(1+5)\cdot 5}{2}-15=15-15=0.$$

10. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x+1$ függvény. Számítsátok ki $\frac{f(a)+f(a+2)}{2}$.

Megoldás:

Egyenként behelyettesítjük a függvénybe x helyett az a, illetve $a+2$ értéket:

$$\frac{f(a)+f(a+2)}{2}=\frac{5a+1+5(a+2)+1}{2}=\frac{5a+1+5a+10+1}{2}=\frac{10a+12}{2}=5a+6.$$

Javasolt feladatok eredménnyel

13. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3$ függvény. Számítsátok ki $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(5)$.

Eredmény: 0.

14. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x-4}{6}$ függvény. Számítsátok ki $f(-6)\cdot f(-5)\cdot f(-4)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

Eredmény: 0.

15. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-3$ függvény. Számítsátok ki $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2015)+2015$.

Eredmény: 2015.

16. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$ függvény. Számítsátok ki $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

Eredmény: 120.

17. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-1$ függvény. Számítsátok ki $f(-10)+f(-9)+\ldots+f(10)$.

Eredmény: -21.

18. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3$ függvény. Számítsátok ki $\frac{f(a)+f(a+2)}{2}$.

Eredmény: $a-2$.

19. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+5$ függvény. Számítsátok ki $f(-1)+f(1)$.

Eredmény: 10.

20. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3$ függvény. Számítsátok ki $f(-2)\cdot f(-1)\cdot\ldots\cdot f(2015)$.

Eredmény: 0.

21. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x$ függvény. Számítsátok ki $f(-2015)+f(2015)$.

Eredmény: 6.

22. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-10$ függvény. Számítsátok ki $1000+f(-20)\cdot f(-10)\cdot\ldots\cdot f(2000)$.

Eredmény: 1000.

Az elsőfokú függvény koordinátatengelyekkel való metszéspontjai

Az elsőfokú függvény az Ox tengelyt a $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ pontban metszi.

Az elsőfokú függvény az Oy tengelyt a $0,b$ pontban metszi.

Begyakorló példák megoldással

6. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+2$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Megoldás:

A fentiek alapján $a=-4,\ b=2$, ezért $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{-4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. A függvény az Ox tengelyt a $\left(\frac{1}{2},0\right)$ és az Oy tengelyt a $0,2$ pontban metszi.

7. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Megoldás:

Az $a=3,\ b=-2$, ezért az Ox tengelyt a $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ és az Oy tengelyt a $0,-2$ pontban metszi.

8. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Megoldás:

Az $a=1,\ b=0$, ezért $-\frac{b}{a}=-\frac{0}{1}=0$ az Ox tengelyt is és az Oy tengelyt is a $0,0$ pontban metszi. Ebben az esetben a két metszéspont egybeesik az origóval.

9. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2015x+1$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Megoldás:

Az $a=2015,\ b=1$, ezért az Ox tengelyt a $\left(-\frac{1}{2015},0\right)$ és az Oy tengelyt a $0,1$ pontban metszi.

10. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ elsőfokú függvényt úgy, hogy a függvény grafikus képe az Ox tengelyt az $A(-5,\ 0)$ pontban és az Oy tengelyt a $B(0,\ 5)$ pontban metssze.

Megoldás:

A függvény $f(x)=ax+b$ alakú, az $A(-5,\ 0)$ pontban metszi az Ox tengelyt, tehát $-5a+b=0$, illetve a $B(0,\ 5)$ pontban metszi az Oy tengelyt, tehát $b=5$. Az előbbi összefüggésbe visszahelyettesítve, kapjuk, hogy $-5a+5=0$, innen pedig kifejezve az ismeretlent $a=1$. A keresett függvény tehát $f(x)=x+5$.

Javasolt feladatok eredménnyel

11. Határozzátok meg az, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-7$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Eredmény: az Ox tengelyt a $7,0$ pontban, az Oy tengelyt a $0,-7$ pontban metszi.

12. Határozzátok meg az, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2-x$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Eredmény: az Ox tengelyt a $2,0$ pontban, az Oy tengelyt a $0,2$ pontban metszi.

13. Határozzátok meg az, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{3}$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Eredmény: az Ox tengelyt a $-1,0$ pontban, az Oy tengelyt a $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ pontban metszi.

14. Határozzátok meg az, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{2}x-7$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Eredmény: az Ox tengelyt a $14,0$ pontban, az Oy tengelyt a $0,-7$ pontban metszi.

15. Határozzátok meg az, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Eredmény: az Ox tengelyt a $0,0$ pontban, az Oy tengelyt a $0,0$ pontban metszi.

16. Határozzátok meg az, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2015-2014x$ függvény grafikus képének a tengelyekkel való metszéspontjait.

Eredmény: az Ox tengelyt a $\left(\dfrac{2015}{2014},0\right)$ pontban, az Oy tengelyt a $0,2015$ pontban metszi.

17. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ elsőfokú függvényt úgy, hogy a függvény grafikus képe az Ox tengelyt az $A(-2,\ 0)$ pontban és az Oy tengelyt a $B(0,\ 4)$ pontban metssze.

Eredmény: $f(x)=2x+4.$

18. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ elsőfokú függvényt úgy, hogy a függvény grafikus képe az Ox tengelyt az $A(1,\ 0)$ pontban és az Oy tengelyt a $B(0,-1)$ pontban metssze.

Eredmény: $f(x)=x-1.$

19. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ elsőfokú függvényt úgy, hogy a függvény grafikus képe az Ox tengelyt az $A(2,\ 0)$ pontban és az Oy tengelyt a $B(0,\ 2)$ pontban metssze.

Eredmény: $f(x)=-x+2.$

20. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ elsőfokú függvényt úgy, hogy a függvény grafikus képe az Ox tengelyt is és az Oy tengelyt is az $A(0,\ 0)$ pontban metssze.

Eredmény: $f(x)=ax,\ ahol\ a\neq 0.$

Pont hozzátartozása az elsőfokú függvény grafikonjához

Egy $A\ \alpha,\beta$ pont akkor van rajta az elsőfokú függvény grafikus képén, ha $f(\alpha)=\beta$, azaz ha a pont első koordinátáját (abszcisszának nevezzük) behelyettesítve a függvénybe a pont második koordinátáját (ordinátának nevezzük) kapjuk.

Például, ha $f(x)=3x-2$, akkor az $A\ 2,4$ pont rajta van a függvény grafikus képén, mert $f(2)=3\cdot 2-2=6-2=4$.

Begyakorló példák megoldással

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-2$ függvény. Határozzatok meg a függvény grafikus képén egy olyan pontot, amelynél az abszcissza egyenlő az ordinátával.

Megoldás:

Egy olyan pontot keresünk, ahol $A\ m,m$ és a pont hozzátartozik a grafikus képéhez, azaz $f(m)=m$, tehát $3\cdot m-2=m$, innen $3\cdot m-m=2\ \Rightarrow\ 2\cdot m=2\ \Rightarrow\ m=1$. A keresett pont $A\ 1,1$.

8. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-mx+2$ függvény grafikus képe áthaladjon az $A(-4,\ 6)$ ponton.

Megoldás:

Az $A(-4,\ 6)$ pont rajta kell legyen a függvény grafikus képén, tehát az $f(-4)=6$ összefüggés kell teljesüljön. $f(-4)=-m\cdot(-4)+2=4m+2$, innen $4m+2=6\ \Rightarrow 4m=6-2\ \Rightarrow 4m=4$, tehát $m=1$.

9. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét tudva, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{3}x-m$ függvény grafikus képe tartalmazza az $A\left(\frac{3}{2},m\right)$ pontot.

Megoldás:

Az $A\left(\frac{3}{2},m\right)$ pont rajta kell legyen a függvény grafikus képén, tehát az $f\left(\frac{3}{2}\right)=m$ összefüggés kell teljesüljön. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}-m=1-m$, innen $1-m=m\ \Rightarrow 1=m+m\ \Rightarrow 1=2m\ \Rightarrow\ m=\frac{1}{2}$.

10. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ függvényt, ahol $a,b\in\mathbb{R}$, tudva, hogy a függvény grafikus képe áthalad az $A(2,0)$ és $B(0,4)$ pontokon.

Megoldás:

Az $A(2,0)$ és a $B(0,4)$ pontok rajta kell legyenek a függvény grafikus képén, tehát az $f(2)=0$ és $f(0)=4$ összefüggések kell teljesüljenek. Vagyis $f(2)=2\cdot a+b=0$ és $f(0)=0\cdot a+b=b=4$. A b értékét ezzel meg is határoztuk. Visszahelyettesítve az első összefüggésbe $2\cdot a+b=2\cdot a+4=0\ \Rightarrow 2\cdot a=-4\ \Rightarrow\ a=-\frac{4}{2}=-2$. Egy elsőfokú függvény akkor van meghatározva, ha ismerjük az együtthatóit: $f(x)=-2x+4$.

11. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+4m-2$ függvény. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $A(2m-1,4m)$ pont hozzátartozzon az f függvény grafikus képéhez.

Megoldás:

Az $A(2m-1,4m)$ pont rajta kell legyen a függvény grafikus képén, tehát az $f\ \ 2m-1\ \ =4m$ összefüggés kell teljesüljön. $f(2m-1)=2\cdot\ \ 2m-1\ \ +4m-2=4m-2+4m-2=8m-4$
Visszahelyettesítve az összefüggésbe, kapjuk, hogy
$8m-4=4m\ \Rightarrow 8m-4m=4\ \Rightarrow 4m=4\ \Rightarrow m=1.$

Javasolt példák eredménnyel.

2. Határozzátok meg az $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=ax+2$ függvény grafikus képe áthaladjon az $A\left(2,\ 4\right)$ ponton.

Eredmény: $a=\dfrac{1}{2}.$

5. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=x+m$ függvény grafikus képe áthaladjon az $A\left(0,\ 2\right)$ ponton.

Eredmény: $m=2.$

6. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=x-m$ függvény grafikus képe áthaladjon az $A\left(2,m\right)$ ponton.

Eredmény: $m=1.$

7. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=mx+1$ függvény grafikus képe áthaladjon az $A\left(1,\ 5\right)$ ponton.

Eredmény: $m=4.$

8. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=2x+1$ függvény. Határozzatok meg a függvény grafikus képén egy olyan pontot, amelynél az abszcissza egyenlő az ordinátával.

Eredmény: $m=-1.$

9. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=3x+2$ függvény. Határozzatok meg a függvény grafikus képén egy olyan pontot, amelynél az abszcissza egyenlő az ordinátával.

Eredmény: $m=-1.$

10. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=5x-8$ függvény. Határozzatok meg a függvény grafikus képén egy olyan pontot, amelynél az abszcissza egyenlő az ordináta háromszorosával.

Eredmény: $m=4.$

10. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ függvényt, ahol $a,b\in\mathbb{R}$, tudva, hogy a függvény grafikus képe áthalad az $A\left(1,0\right)$ és $B\left(0,2\right)$ pontokon.

Eredmény: $f(x)=-2x+2.$

11. Határozzátok meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ függvényt, ahol $a,b\in\mathbb{R}$, tudva, hogy a függvény grafikus képe áthalad az $A\left(4,0\right)$ és $B\left(0,2\right)$ pontokon.

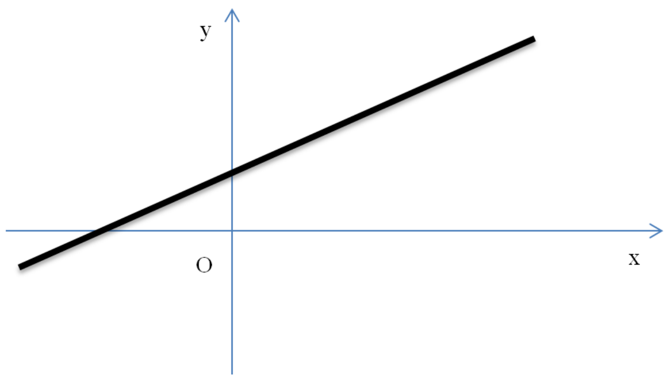
Eredmény: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+2.$

12. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+m$ függvény. Határozzátok meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $A(2m-5,m+2)$ pont hozzátartozzon az f függvény grafikus képéhez.

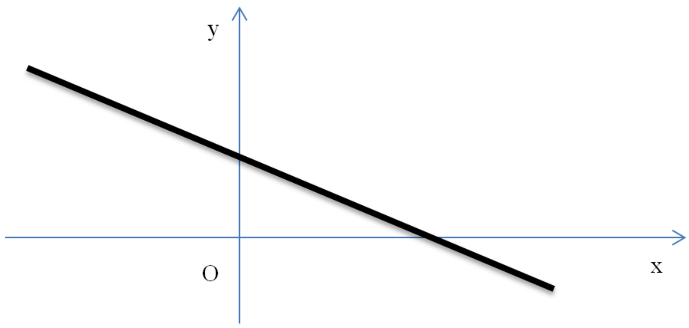
Eredmény: $m=3.$

Az elsőfokú függvény monotonitása, az elsőfokú függvény előjelszabálya

Az elsőfokú függvény szigorúan monoton függvény, ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=ax+b$ és $a>0$ akkor szigorúan növekvő:



Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=ax+b$ és $a<0$ akkor szigorúan csökkenő:



Az előbbiekből következik az elsőfokú függvény előjelszabálya, amely segítségével oldható meg az elsőfokú egyenlőtlenség:

Az elsőfokú függvény előjelszabály táblázata

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$f(x)$	a-val ellentétes előjel	0	a-val megegyező előjel

Például, ha $f(x)=x+2$, akkor $a=1$ *és* $b=2$, innen következik, hogy $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$, tehát az előjelszabály alapján $f(x)<0$ (azaz negatív, mert $a=1$ pozitív) a $-\infty,-2$ intervallumon és $f(x)>0$ (azaz pozitív, mert $a=1$ pozitív) a $-2,\infty$ intervallumon.

Begyakorló példák megoldással

5. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $2x-3<5$ egyenlőtlenséget.

Megoldás:

Vigyünk mindent át a baloldalra (nullához hasonlítunk), kapunk egy elsőfokú kifejezést $2x-3-8<0$, vagyis $f(x)=2x-11<0$, a baloldali kifejezést elneveztük $f(x)$ -nek.

Mivel $a = 2$ *és* $b = -11$, innen $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-11}{2} = \dfrac{11}{2}$ és $a = 2$ pozitív, elkészítjük az előjeltáblázatot:

x	$-\infty$	$\dfrac{11}{2}$	∞
$f(x)$	$-----------$	0	$++++++++++++$

Mivel a függvény a negatív értékeket a $\left(-\infty, \dfrac{11}{2}\right)$ intervallumon veszi fel, ez lesz az egyenlőtlenség megoldása.

Megjegyzés: a váltási pontnál szigorú egyenlőtlenségnél kerek, másképp szögletes zárójelet használunk.

6. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $2x - 1 \leq 3$ egyenlőtlenséget.

Megoldás:

Vigyünk itt is át a baloldalra a tagokat $2x - 1 - 3 \leq 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x - 4$ $a = 2$ *és* $b = -4$, innen $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-4}{2} = 2$, a táblázat a következő:

x	$-\infty$	2	∞
$f(x)$	$-----------$	0	$++++++++++++$

A megoldás tehát: $x \in -\infty, 2$.

7. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $2x + 5 \geq 0$ egyenlőtlenséget.

Megoldás:

$a = 2$ *és* $b = 5$, $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{5}{2}$ a táblázat a következő:

x	$-\infty$	$-\dfrac{5}{2}$	∞
$f(x)$	$-----------$	0	$++++++++++++$

A megoldás tehát: $x \in \left[-\dfrac{5}{2}, \infty\right)$.

8. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $-2x + 4 \leq 0$ egyenlőtlenséget.

Megoldás:

$a = -2$ *és* $b = 4$, $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{4}{-2} = 2$ a táblázat a következő:

x	$-\infty$	2	∞
$f(x)$	$++++++++++++$	0	$-----------$

A megoldás tehát: $x \in 2, \infty$.

6. Oldjátok meg a természetes számok halmazában a $2x - 3 < 5$ egyenlőtlenséget.
Megoldás:

$2x-3<5 \Rightarrow 2x-8<0$, észrevesszük, hogy az egyenlőtlenség osztható 2-vel, tehát $x-4<0$

$a=1$ *és* $b=-4$, $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-4}{1}=4$ a táblázat a következő:

x	$-\infty$	4	∞
$f(x)$	$-----------$	0	$+++++++++++$

A megoldás tehát: $x \in -\infty, 4$ lenne a valós számok halmazán. De ebben a megoldáshalmazban csak a következő természetes számok vannak: $0,1,2,3,4$. Ez a feladat megoldása.

Javasolt példák eredménnyel.

11. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $3x+1\geq 0$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in \left[-\dfrac{1}{3},\infty\right)$.

12. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $x-3\leq 1$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in -\infty, 4$.

13. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $2x+1>5$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in 2, \infty$.

14. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $3-x<4$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in -1, \infty$.

15. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $x+1>2x-3$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in -\infty, 4$.

16. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $3x+1\geq 4$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in 1, \infty$.

17. Oldjátok meg a valós számok halmazában a $x+2\leq 7$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in -\infty, 5$.

18. Oldjátok meg a természetes számok halmazában a $x-1\leq 5$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in 0,1,2,3,4,5,6$.

19. Oldjátok meg a természetes számok halmazában a $2x+1<7$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in 0,1,2$.

20. Oldjátok meg a természetes számok halmazában a $3x+1<14$ egyenlőtlenséget.

Eredmény: $x \in 0,1,2,3$.

Az elsőfokú függvény grafikus ábrázolása

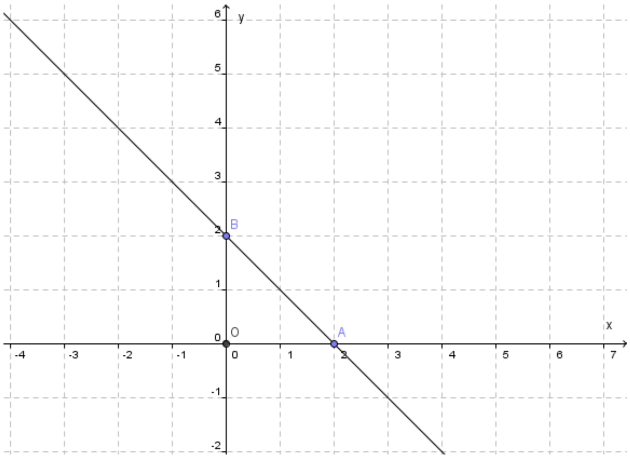
Mivel az elsőfokú függvény grafikus képe egy egyenes és egy egyenest két különböző pontja meghatározza, elég két pontját egy derékszögű koordinátarendszerben ábrázolni és azt egy vonalzóval összekötni. Ez a két pont lehet a tengelyekkel való metszéspont is. A biztonság kedvéért lehet három pontot is ábrázolni, ugyanis, ha elszámolunk, a három ábrázolt pont nagy valószínűséggel nem lesz egy egyenesen. Ilyenkor ellenőrizni kell a számolásokat.

Begyakorló példák megoldással

6. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2$ függvényt.

Megoldás:

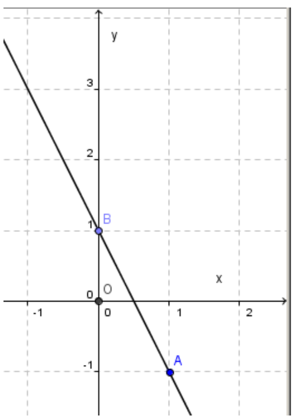
A függvény a tengelyeket a $2,0$ és $0,2$ pontokban metszi, ezeket ábrázolva a derékszögű koordinátarendszerben és vonalzóval összekötve, a következő grafikus képet kapjuk:



7. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$ függvényt.

Megoldás:

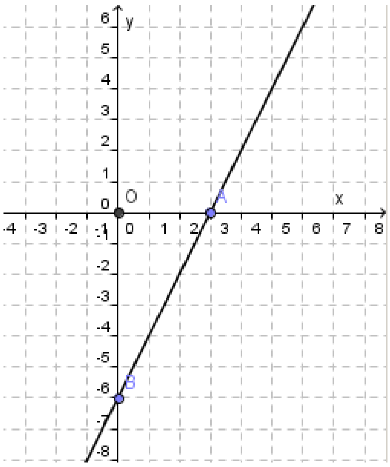
A függvény a tengelyeket a $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ és $0,1$ pontokban metszi. Az első pont helyett a tört miatt lehet másik pontot választani, a könnyebb ábrázolhatóság érdekében, például legyen $1,-1$. Ezt a és a $0,1$ pontot ábrázolva a derékszögű koordinátarendszerben és vonalzóval összekötve, a következő grafikus képet kapjuk:



8. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-6$ függvényt.

Megoldás:

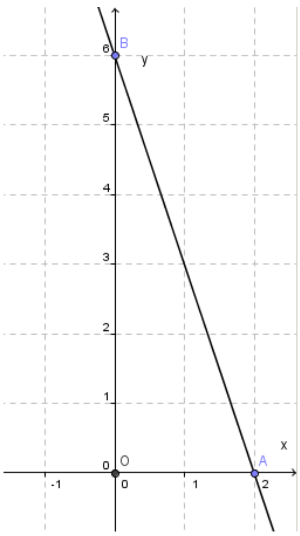
A függvény a tengelyeket a $3,0$ és $0,-6$ pontokban metszi, ezeket ábrázolva a derékszögű koordinátarendszerben és vonalzóval összekötve, a következő grafikus képet kapjuk:



9. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+6$ függvényt.

Megoldás:

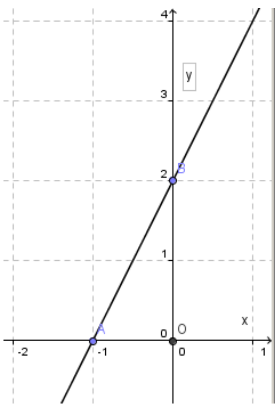
A függvény a tengelyeket a $2,0$ és $0,6$ pontokban metszi, ezeket ábrázolva a derékszögű koordinátarendszerben és vonalzóval összekötve, a következő grafikus képet kapjuk:



10. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+2$ függvényt.

Megoldás:

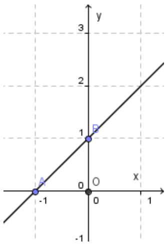
A függvény a tengelyeket a $-1,0$ és $0,2$ pontokban metszi, ezeket ábrázolva a derékszögű koordinátarendszerben és vonalzóval összekötve, a következő grafikus képet kapjuk:



Javasolt példák eredménnyel.

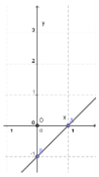
11. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$ függvényt.

Eredmény:



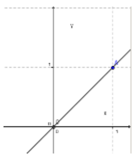
12. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$ függvényt.

Eredmény:



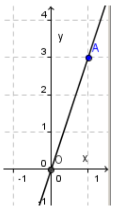
13. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$ függvényt.

Eredmény:



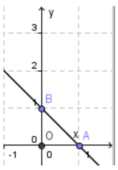
14. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x$ függvényt.

Eredmény:



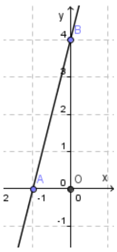
15. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+1$ függvényt.

Eredmény:



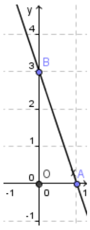
16. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+4$ függvényt.

Eredmény:



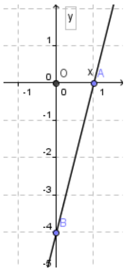
17. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+3$ függvényt.

Eredmény:



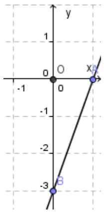
18. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x-4$ függvényt.

Eredmény:



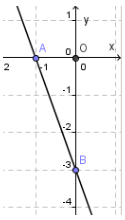
19. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-3$ függvényt.

Eredmény:



20. Ábrázoljátok grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x-3$ függvényt.

Eredmény:



Az elsőfokú egyenletrendszerek

Az elsőfokú egyenletrendszerek alakja a következő:

$\begin{cases} ax+by=d \\ cx+dy=e \end{cases},\quad ahol\ a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. Megoldása több módszerrel is lehetséges, a továbbiakban egyet fogunk bemutatni, a kiejtés módszerét. Ez abban áll, hogy az egyenleteket megfelelő számmal szorozva és ezután összeadva, a célunk az, hogy vagy az x vagy az y változó kiessen. Akkor a maradt változó meghatározható a kapott egyenletből. Ezt az értéket visszahelyettesítve az egyik eredeti egyenletbe, kiszámítjuk a másik változó értékét.

Begyakorló példák megoldással

6. Oldjátok meg az $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Megoldás:

Kiválasztjuk például az y változót. Az első egyenletet szorozzuk 2-vel, a másodikat 3-mal:

Az egyenletrendszer a következőképpen alakul: $\begin{cases} 4x+6y=10 \\ 9x-6y=3 \end{cases}$, összeadjuk és kapjuk a következő egyenletet: $13x=13$, vagyis $x=1$. Helyettesítsük vissza az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe: $2+3y=5 \Rightarrow \quad 3y=5-2 \quad \Rightarrow 3y=3 \quad \Rightarrow y=1$. Tehát az egyenletrendszer megoldása: $x=1,\ y=1$.

7. Oldjátok meg az $\begin{cases} -x-2y=5 \\ 4x+y=1 \end{cases} x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Megoldás:

Kiválasztjuk az x változót, az első egyenletet szorozzuk 4-el, a másodikat nem bővítjük:

Az egyenletrendszer a következőképpen alakul: $\begin{cases} -4x-8y=20 \\ 4x+y=1 \end{cases}$, összeadjuk és kapjuk a következő egyenletet: $-7y=21$, vagyis $y=-3$. Helyettesítsük vissza az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe: $-x+6=5 \Rightarrow \quad -x=5-6 \quad \Rightarrow -x=-1 \quad \Rightarrow x=1$. Tehát az egyenletrendszer megoldása: $x=1,\ y=-3$.

8. Oldjátok meg az $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x+4y=13 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Megoldás:

Kiválasztjuk például az y változót. Az első egyenletet szorozzuk -4-el, a másodikat 3-mal:

Az egyenletrendszer a következőképpen alakul: $\begin{cases} -8x-12y=-32 \\ 15x+12y=39 \end{cases}$, összeadjuk és kapjuk a következő egyenletet: $7x=7$, vagyis $x=1$. Helyettesítsük vissza az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe: $2+3y=8 \Rightarrow \quad 3y=8-2 \quad \Rightarrow 3y=6 \quad \Rightarrow y=2$. Tehát az egyenletrendszer megoldása: $x=1,\ y=2$.

9. Oldjátok meg az $\begin{cases} x+2y=\dfrac{7}{6} \\ 2x+3y=2 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Megoldás:

Kiválasztjuk például az x változót. Az első egyenletet szorozzuk -2-vel, a másodikat nem bővítjük:

Az egyenletrendszer a következőképpen alakul: $\begin{cases} -2x-4y=-\dfrac{14}{6} \\ 2x+3y=2 \end{cases}$, összeadjuk és kapjuk a következő egyenletet: $-y=2-\dfrac{14}{6}$, $\Rightarrow -y=-\dfrac{2}{6}$, vagyis $y=\dfrac{1}{3}$. Helyettesítsük vissza az eredeti egyenletrendszer masodik egyenletébe: $2x+3\cdot\dfrac{1}{3}=2 \Rightarrow \quad 2x=2-1 \quad \Rightarrow 2x=1 \quad \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Tehát az egyenletrendszer megoldása: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

10. Oldjátok meg az $\begin{cases} 2y=5 \\ x-y=1 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Megoldás:

Kiválasztjuk például az y változót, mert azt azonnal megkaphatjuk az első egyenletből: $y=\dfrac{5}{2}$.

Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe: $x-\dfrac{5}{2}=1 \Rightarrow \quad x=1+\dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$. Tehát az egyenletrendszer megoldása: $x=\dfrac{7}{2}$, $y=\dfrac{5}{2}$.

Javasolt példák eredménnyel.

11. Oldjátok meg az $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=-3 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x=-1, y=1$.

12. Oldjátok meg az $\begin{cases} 3x-y=8 \\ x-2y=1 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x=3, y=1$.

13. Oldjátok meg az $\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=0 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x=-2, y=-2$.

14. Oldjátok meg az $\begin{cases} 2x-3y=-6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x=0, y=2$.

15. Oldjátok meg az $\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 5x-20y=5 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x=1, y=0$.

16. Oldjátok meg az $\begin{cases} x+y=12 \\ 2x-y=0 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x=4, y=8$.

17. Oldjátok meg az $\begin{cases} 3x-y=25 \\ x-3y=27 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x = 6, y = -7$.

18. Oldjátok meg az $\begin{cases} 17x - 25y = -8 \\ -5x - 8y = -13 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x = 1, y = 1$.

19. Oldjátok meg az $\begin{cases} 2x - y = \dfrac{7}{12} \\ x - 3y = -\dfrac{19}{12} \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{3}{4}$.

20. Oldjátok meg az $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = \dfrac{3}{2} \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}$ egyenletrendszert.

Eredmény: $x = \dfrac{1}{2}, y = -\dfrac{1}{2}$.

3. Fejezet: Sorozatok

Számtani sorozat (haladvány)

Értelmezés: Azt a számsorozatot, amelynek minden tagját, a másodiktól kezdve, úgy kapjuk, hogy az előzőhöz ugyanazt a számot hozzáadjuk, számtani haladványnak nevezzük.

Más szóval az

$$\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots}$$

számsorozat számtani haladványt alkot, ha: $\mathbf{a_2 = a_1 + r,\ a_3 = a_2 + r,\ a_4 = a_3 + r, \ldots,}$

$\mathbf{a_{n+1} = a_n + r}$, bármely $\mathbf{n \geq 1}$ esetén. Ahol az **r** számot, a sorozat állandó különbségének (rációjának) nevezzük.

Az $\mathbf{(a_n)}$ számtani haladvány teljesen értelmezett, ha ismerjük az első tagját $\mathbf{a_1}$ és az **r** különbségét.

Jelölése: $\div\ \mathbf{(a_n)}$

Az $\div\ \mathbf{(a_n)}$ számtani haladvány általános tagja felírható az első tag és az állandó különbség segítségével: $\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \bullet r}$, bármely $n > 1$ esetén.

Példák:

1. Ha $a_1 = 3$ és $r = 4$, akkor, a sorozat tagjai: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, …. .

$a_2 = 3+4 = 7$, $a_3 = 7+4 = 11$, $a_4 =11+4 = 15$, $a_5 = 15+4 = 19$, $a_6 =19+4 = 23$,…. vagy

$a_2 = 3+4 = 7$, $a_3 = 3+2 \bullet 4 = 11$, $a_4 = 3+3 \bullet 4 = 15$, $a_5 = 3+4 \bullet 4 = 19$, $a_6 = 3+5 \bullet 4 = 23$, …

2. Ha $b_1 = 10$ és $r = -2$, akkor, a sorozat tagjai: 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, …. .

$b_2 = 10+(-2) = 8$, $b_3 = 7+(-2) = 6$, $b_4 =6+(-2) = 4$, $b_5 = 4+(-2) = 2$, $b_6 =2+(-2) = 0$,…. vagy

$b_2 =10+(-2) = 8$, $b_3 = 10+2 \bullet (-2) = 6$, $b_4 =10+3 \bullet (-2) = 4$, $b_5 = 10+4 \bullet (-2) = 2$, $b_6 =10+5 \bullet (-2) = 0$,…

Tulajdonságok: Bármely számtani haladványban:

1. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, n>1, vagyis minden tag, a másodiktól kezdve a szomszédos tagok számtani középarányosa.

2. Az első n tag összege: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Megoldott feladatok:

1. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_1 = 1$ és $a_5 = 13$. Számítsd ki a_{2015}.

Megoldás:

Előbb kiszámítjuk az r állandó különbséget. Tudjuk, hogy $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 13 = 1 + 4r \Rightarrow 4r = 12 \Rightarrow r = 3$.

Alkalmazzuk az általános tag képletét:

$$a_{2015} = a_1 + 2014r \Rightarrow a_{2015} = 1 + 2014 \cdot 3 \Rightarrow a_{2015} = 1 + 6042 \Rightarrow a_{2015} = 6043$$

2. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_3 = 5$ és $a_6 = 11$. Számítsd ki $a_1, r, a_9, a_{11}, S_{12}$.

Megoldás:

Mivel $a_3 = a_1 + 2r$, $a_6 = a_1 + 5r$, a különbség közöttük 3r és $a_6 - a_3 = 6$, vagyis 3r = 6,

$r = \frac{6}{3} = 2$.

Az $a_3 = a_1 + 2r$ egyenletbe behelyettesítve, kapjuk: $5 = a_1 + 4$, ahonnan $a_1 = 1$.

$a_9 = a_1 + 8r$, $a_9 = 1 + 16 = 17$, $a_{11} = a_1 + 10r$, $a_{11} = 1 + 20 = 21$,

$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(1 + a_{12}) \cdot 12}{2}$, kiszámoljuk az a_{12}-t. $a_{12} = a_1 + 11r$, $a_{12} = 1 + 22 = 23$,

$S_{12} = \frac{(1 + 23) \cdot 12}{2} = \frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$. Az első 12 tag összegét kiszámíthatjuk úgy is, hogy kiszámoljuk a tagokat és összeadjuk.

S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +15 +17 + 19 + 21 + 23 = 144.

3. Számítsd ki az $1 + 5 + 9 + 13 + ... + 25$ összeget!

Megoldás:

Észrevesszük, hogy az összeg tagjai számtani haladványban vannak.

Az első tag $a_1 = 1$, r = 4. Megnézzük, hogy a 25 hanyadik tagja a sorozatnak, alkalmazva a képletet. $a_n = a_1 + (n-1)r$, $25 = 1 + (n-1) \bullet 4$, kivonva mindkét oldalból 1-et, a következőt kapjuk: $24 = (n-1) \bullet 4$, amit ha elosztunk 4-el megkapjuk, hogy n-1 = 6, ahonnan n = 7. Kiszámoljuk az első 7 tag összegét.

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = \frac{(1 + 25) \cdot 7}{2} = \frac{26 \cdot 7}{2} = 13 \cdot 7 = 91$$

Másik lehetőség az összeg kiszámítására, ha felírjuk az összes tagot:

1 +5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 = 91

4. Határozd meg x valós értékét, ha $x - 3$, 4, $x + 3$ egy számtani haladvány három egymás utáni tagja.

Felhasználjuk azt a tulajdonságot, hogy bármely tagnak és az őt megelőző tagnak a különbsége állandó. Vagyis: 4 – (x-3) = x+3 – 4 $\Rightarrow$ 4 – x +3 = x – 1, $\Rightarrow$ 7 – x = x – 1 $\Rightarrow$ 8 = 2x $\Rightarrow$ x = 4.

Egy másik lehetőség a feladat megoldására, ha felhasználjuk azt a tulajdonságot, hogy $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$,

vagyis $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 4 = \dfrac{x-3+x+3}{2} \Rightarrow 4 = \dfrac{2x}{2} \Rightarrow x = 4$.

5. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány r különbségét, ha tudjuk, hogy $a_{10} - a_2 = 16$.

Megoldás:

Mindkét tagot felírjuk az általános tag képlete segítségével. $a_{10} = a_1 + 9\cdot r$ és $a_2 = a_1 + r$ majd behelyettesítjük: $a_1 + 9r - (a_1 + r) = 16$. Felbontjuk a zárójelet $a_1 + 9r - a_1 - r = 16 \Rightarrow 8r = 16 \Rightarrow r = 2$.

Javasolt feladatok:

1. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_1 = 2$ és $a_2 = 4$. Számítsd ki a számtani haladvány első tíz tagjának az összegét!

2. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_2 = 7$ és $r = 3$. Számítsd ki a_8.

3. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány első 6 tagjának összegét, ha $a_1 = 2$ és $a_2 = 5$.

4. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_1 = 7$ és $a_2 = 6$. Számítsd ki a_7.

5. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_1 = 5$ és $a_3 = 11$. Számítsd ki a haladvány első 10 tagjának összegét.

6. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, amelyben $a_1 = 7$ és $a_7 = 37$. Számítsd ki a haladvány első tíz tagjának összegét.

7. Számítsd ki a számtani haladvány ötödik tagját, ha a haladvány első tagja 7 és a második tagja 9.

8. Határozd meg az x valós számot, ha tudjuk, hogy az $-1, 2x, 9, 14, \dots$ sorozat egy számtani haladvány!

9. Számítsd ki az $1+11+21+31+...+111$ összeget.

10. Számítsd ki a $2+5+8+\ldots+26$ összeget.

11. Számítsd ki a $2+12+22+\ldots+92$ összeget.

12. Határozd meg az x valós számot, ha az x + 1, 2x – 1 és 2x +1 számok egy számtani haladvány egymás utáni tagjai.

13. Határozd meg egy számtani haladvány első tagját, ha az állandó különbség 8, és az első két tag összege 20.

14. Határozd meg $x \in \mathbb{R}$ értékét tudva, hogy $x-1, x+3$ és $2x-1$ egy számtani haladvány egymás utáni tagjai.

15. Határozd meg az *x* valós számot tudva, hogy $x-1$, $2x-4$ és $x+3$ egy számtani haladvány egymás utáni tagjai.

16. Határozzuk meg az *a* valós számot, ha tudjuk, hogy az 5; (3+*a*) és 11 számtani haladványban vannak.

17. Az *a, -6, b* , *2* egy számtani haladvány egymásután következő tagjai. Számítsuk ki $a+b$ értékét.

18. Határozzuk meg az első tagját és az állandó különbségét az $(a_n)_{n\geq1}$ számtani haladványnak, ha $a_4+a_6=46$ és $a_7-a_3=20$.

19. Egy $(a_n)_{n\geq1}$ számtani haladvány állandó különbsége 3 és $a_1=3$ .Számítsuk ki a haladvány első 20 tagjának összegét.

20. Tudva, hogy az $(a_n)_{n\geq1}$ egy számtani haladvány, amelyben $a_{10}=10$ és $a_{15}=15$, határozzuk meg a_1-et és az r állandó különbséget.

21. Ha az $(a_n)_{n\geq1}$ sorozat számtani haladvány, amelyben $a_5=22$ és $a_{27}=132$, számítsuk ki a_{16}-ot.

22. Az $(a_n)_{n\geq1}$ sorozat egy számtani haladvány, amelyben $a_5=17$ és $a_{10}=37$. Határozzuk meg az $(a_n)_{n\geq1}$ sorozat első 12 tagjának az összegét.

23. Az $(a_n)_{n\geq1}$ sorozat egy számtani haladvány, amelyben $a_6=17$ és $a_9=26$. Határozzuk meg az $(a_n)_{n\geq1}$ haladvány első 15 tagjának összegét.

Mértani sorozat (haladvány)

Értelmezés: Azt a számsorozatot, amelynek minden tagját, a másodiktól kezdve, úgy kapjuk, hogy az előző tagot szorozzuk ugyanazzal a nullától különböző számmal, mértani haladványnak nevezzük.

Más szóval a

$$\mathbf{b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, b_{n+1}, \ldots}$$

számsorozat mértani haladványt alkot, ha: $\mathbf{b_2 = b_1 \cdot q,\ b_3 = b_2 \cdot q,\ b_4 = b_3 \cdot q, \ldots,}$

$\mathbf{b_{n+1} = b_n \cdot q}$, bármely $\mathbf{n \geq 1}$ esetén. Ahol a **q** számot, a sorozat állandó hányadosának nevezzük, $\mathbf{b_1 \neq 0}$.

$$\left(q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\ldots=\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$$

A $\mathbf{(b_n)}$ métani haladvány teljesen értelmezett, ha ismerjük az első tagját $\mathbf{b_1}$ és a **q** hányadost.

Jelölése: $(b_n)_{n\geq1}$

A $\mathbf{(b_n)}$ mértani haladvány általános tagja felírható az első tag és az állandó hányados segítségével: $\mathbf{b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}}$, bármely n > 1 esetén.

Példák:

1. Ha $b_1 = 3$ és $q = 4$, akkor, a sorozat tagjai: 3, 12, 48, 192, …. .

$b_2 = 3\cdot4 = 12$, $b_3 = 12\cdot4 = 48$, $b_4 = 48\cdot4 = 192$, …. vagy

$b_2 = 3\cdot4 = 12$, $a_3 = 3\cdot4^2 = 48$, $b_4 = 3\cdot4^3 = 192$, …

2. Ha $b_1=10$ és $q=-2$, akkor, a sorozat tagjai:10,- 20, 40, -80, 160, -320, 640,

-1280, …. .

$b_2 = 10\cdot\mathbf{(-2)} = -20$, $b_3 = (-20)\cdot\mathbf{(-2)} = 40$, $b_4 = 40\cdot(-2) = -80$, $b_5 = -80\cdot\mathbf{(}-2) = 160$,

$b_6 = 160\cdot(-2) = -320$,…. vagy

$b_2 = 10\cdot(-2) = -20$, $b_3 = 10\cdot(-2)^2 = 40$, $b_4 = 10\cdot(-2)^3 = -80$, $b_5 = 10\cdot(-2)^4 = 160$,

$b_6 = 10 \cdot (-2)^5 = -320, \ldots$

Tulajdonságok: Bármely pozitív tagú mértani haladványban:

1. $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, n \geq 2$**,** vagyis minden tag, a másodiktól kezdve mértani közepe a vele szomszédos két tagnak. Vagy más formában: $b_n^{\ 2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \geq 2$

2. Bármely mértani haladvány esetén az első **n** tag összege: $n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$$

Megoldott feladatok:

1. Adott a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány, amelyben $b_1 = -1$ és az állandó hányados $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Számítsuk ki a haladvány első négy tagjának az összegét.

Megoldás: Felírjuk minden tagját, majd összeadjuk.

$$b_2 = b_1 \cdot q = -1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, b_3 = b_2 \cdot q = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16}, b_4 = b_3 \cdot q = -\frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = -1 + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{64} = \frac{-64 + 16 - 4 + 1}{64} = \frac{-51}{64}$$

2. Határozzátok meg az $(y_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány első két tagját:

$$y_1, y_2, 36, 108, 324, \ldots$$

Megoldás: Mivel ismerjük a harmadik és negyedik tagot, meghatározhatjuk az állandó hányadost.

$$y_3 = 36, y_4 = 108 \Rightarrow q = \frac{y_4}{y_3} = \frac{108}{36} = 3 \Rightarrow y_2 = \frac{y_3}{q} = \frac{36}{3} = 12 \Rightarrow y_1 = \frac{y_2}{q} = \frac{12}{3} = 4$$

3. Adott a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány, amelyben $b_3 = 6, b_5 = 24$. Határozzuk meg a b_7, b_9, b_{10}.

Megoldás:

Előbb kiszámítjuk az állandó hányadost a két megadott tagból. Az általános tag képletét felhasználva:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2, b_5 = b_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{b_5}{b_3} = \frac{b_1 \cdot q^4}{b_1 \cdot q^2} = q^2, \quad \text{másrészt} \quad \frac{b_5}{b_3} = \frac{24}{6} = 4. \quad \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2 \; vagy \; q = -2.$$

$b_3 = b_1 \cdot q^2 \Rightarrow 6 = b_1 \cdot 4 \Rightarrow b_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Ismerve a $b_1 - et$ és $q - t$, kiszámoljuk a tagokat.

1.eset:

$$b_1 = \frac{3}{2}, q = 2 \Rightarrow b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{3}{2} \cdot 2^7 = 3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192,$$

$$b_9 = b_1 \cdot q^8 = b_7 \cdot q^2 = 192 \cdot 2^2 = 192 \cdot 4 = 768,$$

$$b_{10} = b_9 \cdot q = 768 \cdot 2 = 1536$$

2.eset:

$b_1 = \frac{3}{2}, q = -2 \Rightarrow b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{3}{2} \cdot (-2)^7 = 3 \cdot (-2)^6 = 3 \cdot 64 = 192,$

$b_9 = b_1 \cdot q^8 = b_7 \cdot q^2 = 192 \cdot (-2)^2 = 192 \cdot 4 = 768,$

$b_{10} = b_9 \cdot q = 768 \cdot (-2) = -1536$

4. Számítsátok ki az alábbi összeget:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10}.$$

Megoldás:Az összeg tagjai mértani haladványt alkotnak. Az első tagja $b_1 = 1, q = 2$ és van 11 tagunk.

$$b_1 = 1, 2, 2^2, 2^3, ..., b_{11} = 2^{10}$$

Felhasználjuk az első n tag összegének képletét. $S_{11} = b_1 \cdot \frac{q^{11} - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = \frac{2048 - 1}{1} = 2047$.

Kiszámíthatjuk úgy is, hogy kiszámoljuk minden tagját és összeadjuk.

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2047$

5. Egy sorozatnak az a tulajdonsága, hogy bármely $n, n \geq 1$ esetén az első n tag összege $S_n = 4^n - 1$. Döntsük el, hogy a sorozat mértani haladvány-e.

Megoldás:

Kiszámoljuk az $S_1 - et$. $S_1 = 4^1 - 1 = 3 \Rightarrow b_1 = 3$. Majd rendre felírjuk S_2, S_3, S_4.

$S_2 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow b_1 + b_2 = 15 \Rightarrow 3 + b_2 = 15 \Rightarrow b_2 = 15 - 3 = 12$.

$S_3 = 4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 = 63 \Rightarrow 15 + b_3 = 63 \Rightarrow b_3 = 63 - 15 = 48$

Mivel megvan három tagja, következtethetünk az állandó hányadosra. $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{3} = 4,\ illetve\ q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{48}{12} = 4$. Mindkét esetben ugyanazt kaptuk. Ellenőrizzük az első n tag képletét: $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 3 \cdot \frac{4^n - 1}{3} = 4^n - 1$. Vagyis egy mértani haladvány.

6. Határozd meg *x* értékét tudva, hogy az $x - 1, x + 1$ és $2x + 5$ számok egy mértani haladvány egymás utáni tagjai.

Megoldás:

Mivel mértani haladványt alkotnak, felhasználjuk az első tulajdonságot: $b_n{}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

$b_1 = x - 1, b_2 = x + 1, b_3 = 2x + 5 \Rightarrow b_2{}^2 = b_1 \cdot b_3 \Rightarrow (x + 1)^2 = (x - 1) \cdot (2x + 5)$

Elvégezzük a műveleteket és rendezzük az egyenletet.

$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 5x - 2x - 5 \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 3x - 5 \Rightarrow \quad x^2 - 2x^2 + 2x - 3x + 1 + 5 = 0$

$-x^2 - x + 6 = 0$ Beszorozzuk (-1)-el és megoldjuk a másodfokú egyenletet.

$x^2 + x - 6 = 0$, $a = 1,\quad b = 1,\quad c = -6,\quad \Delta = b^2 - 4ac,\quad \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1 + 24 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$, $x_1 = 2,\quad x_2 = -3$.

1. eset: Ha $x = 2$, akkor a három tag: 1, 3, 9. Az állandó hányados $q = 3$.

2. eset: Ha $x = -3$, akkor a három tag: $-4, -2, -1$. Az állandó hányados $q = \dfrac{1}{2}$.

Javasolt feladatok:

1. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány, amelyben $a_1 = -2$ és az állandó hányados $\left(-\dfrac{1}{4}\right)$. Számítsuk ki a haladvány első négy tagjának az összegét.

2. Határozd meg a $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány első három tagjának szorzatát, ha az első tagja 1 és az állandó hányadosa $q = -2$.

3. Számítsd ki egy mértani haladvány első négy tagjának szorzatát, ha első tagja $-\dfrac{1}{125}$ és állandó hányadosa -25.

4. Határozd meg egy mértani haladvány negyedik tagját**,** ha az első tag 16 és a hányados $\dfrac{1}{2}$.

5. Adott a $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány, amelyben $b_1 = 1$ és $b_2 = 3$. Számítsd ki b_4.

6. Határozd meg annak a mértani haladványnak a kilencedik tagját, amelynek állandó hányadosa $\dfrac{1}{3}$ és első tagja 243.

7. Számítsd ki $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^6$ összeget.

8. Számítsd ki $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4}$.

9. Ha az $(x-3)$, 4 és $(x+3)$ számok mértani haladványban vannak, határozzuk meg az *x* valós szám értékét.

10. Határozzuk meg x-et ha tudjuk, hogy az $x-1, x,$ és $x+5$ számok mértani haladványban vannak és $x \in (1, \infty)$.

Eredmények

Számtani haladvány:

1. $S_{10} = 110$; **2.** $a_8 = 25$; **3.** $S_6 = 57$; **4.** $a_7 = 1$; **5.** $S_{10} = 185$; **6.** $S_{10} = 295$; **7.** $a_5 = 15$; **8.** x=2;

9. $S_{12} = 672$; **10.** $S_9 = 126$; **11.** $S_{10} = 470$; **12.** x=4; **13.** $a_1 = 6$; **14.** x=8; **15.** x=5; **16.** a=5;

17. $a+b=-12$; **18.** $a_1=3, r=5$; **19.** $S_{20}=630$; **20.** $a_1=1, r=1$; **21.** $a_1=2, r=5, a_{16}=77$;

22. $a_1=1, r=4, S_{12}=276$; **23.** $a_1=2, r=3, S_{15}=345$

Mértani haladvány: **1.** $S_4=-\frac{51}{32}$; **2.** -8; **3.** $-\frac{1}{125}\cdot\frac{1}{5}\cdot(-5)\cdot 125=1$; **4.** $a_4=2$; **5.** $q=3, b_4=27$;

6. $b_9=\frac{1}{27}$; **7.** $S_7=127$; **8.** $b_9=\frac{145}{81}$; **9.** $x=5$ vagy $x=-5$; **10.** $x=\frac{5}{4}$

4. Fejezet: Másodfokú függvény

Alapok

Értelmezés:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \; ahol \; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Valós gyököknek nevezzük azokat a valós értékeket, amiket behelyettesítve a függvénybe 0-t kapunk, vagyis az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai

A másodfokú függvény gyökeinek kiszámítása: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \; ahol \; \Delta = b^2 - 4ac$.

Csak akkor léteznek valós gyökök, ha a $\Delta \geq 0$ mert csak akkor lehet elvégezni a gyökvonást.

Ha a $\Delta > 0$, akkor két különböző valós gyököt kapunk, ha a $\Delta = 0$, egybeeső gyököket ($x_1 = x_2$).

Ha léteznek valós gyökök, akkor a másodfokú kifejezés felbontható szorzattá a következő módon: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Gyakorlatok:

1. Legyen $f(x) = x^2 + x - 8$ Számítsd ki az $f\big(f(1)\big) - f(2)$ kifejezés értékét!

Megoldás:

$f(1) = 1^2 + 1 - 8 = 2 - 8 = -6.$ $\qquad f\big(f(1)\big) = f(-6) = (-6)^2 + (-6) - 8 = 36 - 6 - 8 = 22.$
$f(2) = 2^2 + 2 - 8 = 4 + 2 - 8 = -2$

Tehát a végeredmény: $f\big(f(1)\big) - f(2) = 22 - (-2) = 22 + 2 = 24$

2.Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^2 - 16$ függvény. Számítsd ki $f(-10) \cdot f(-9) \cdot \ldots \cdot f(0) \cdot \ldots \cdot f(9) \cdot f(10)$.

Megoldás: Megkeressük a függvény gyökeit. Most a= 1, b=0, c=-16. Gyökök: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-16) = 64$ $\quad x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \pm \frac{8}{2} = \pm 4$

A képlet szerint a függvény gyökei -4 és 4. Mivel $f(-4) = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$, a szorzat 0, nem is szükséges további tényezőket kiszámolni.

3.Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ függvény. Határozd meg az $f^2(x) + f(x) - 2 = 0$ egyenlet valós megoldásait.

Megoldás: $f^2(x) = f(x) \cdot f(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ tehát:

$f^2(x) + f(x) - 2 = x^2 + 4x + 4 + (x + 2) - 2 = x^2 + 5x + 6$ vagyis az eredeti egyenlet egyenértékű az $x^2 + 5x + 6 = 0$ vagyis :

Gyökök: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) = 1$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$ $\; x_1 = \frac{-5-1}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3, x_2 = \frac{-5+1}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$

4.Határozz meg egy olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $x_1 = 4$ és $x_2 = 2$.

Megoldás: $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$

5. Számítsd ki az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2-6x+5$ függvény grafikus képének az *Ox* tengellyel való metszéspontjai közötti távolságot!

Megoldás: Most a=-1, b=-6, c=5 Az Ox tengellyel való metszéspontok valójában a gyökök.

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-1)\cdot 5}}{2\cdot(-1)}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{6\pm 4}{-2}\ \ x_1=1, x_2=5.$$

A köztük levő távolság $|x_2-x_1|=|5-1|=4$

6. Határozd meg az $E(x)=x^2-6x+7$ kifejezés értékét $x=3-\sqrt{2}$ -re.

Megoldás: Vagy elvégezzük a kijelölt műveleteket mint binom négyzetre emelése, vagy észrevesszük, hogy ha kiszámoljuk az $x^2-6x+7=0$ egyenlet gyökeit, azt kapjuk, hogy az egyik gyök pont $3-\sqrt{2}$. Tehát ha behelyettesítjük a kifejezésbe, 0-át kapunk.

7. Ha x_1 az $x^2-10x-1=0$ egyenlet egyik megoldása, akkor igazold, hogy $x_1-\dfrac{1}{x_1}=10$

Megoldás: Észrevesszük, hogy 0 nem gyöke az egyenletnek, tehát x_1 nem zéró, az adott kifejezést beszorozhatjuk x_1-el. Kapjuk, hogy $x_1\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)=10x_1$, azaz $x_1^2-1=10x_1$ ami egyenértékü az

$x_1^2-10x_1-1=0$ egyenlettel. Ami igaz, mert x_1 gyöke az egyenletnek, tehát az teljesül.

Javasolt feladatok:

1.Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-5x+1$ és $g(x)=x^2+x-1$ függvények. Határozd meg az $f(x)=-g(x)$ egyenlet valós megoldásait. E: $x_1=0\ x_2=6$

2.Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+5x-22$ függvény. Számítsd ki $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(6)$. E: 0

3.Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^2-5x+2$ függvény. Számítsd ki $f(f(0))-f(4)$ E: 46

4.Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-6x+5$ függvény. Számítsd ki $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2015)$ E: 0

5.Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$ függvény. Számítsd ki az $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ szorzatot. E: 0

6.Határozd meg az $E(x)=x^2-4x+1$ kifejezés értékét $x=2-\sqrt{3}$ -re. E: 0

7.Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x^2-3x+6,\ g(x)=2x+11$ függvények. Oldd meg az $f(x)-g(x)=-5$ egyenletet. E: $x_d=0\ x_2=5$

8. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x-3$ függvény. Számítsd ki az f függvény grafikus képének az *Ox* tengellyel való metszéspontjai közötti távolságot! E: 4

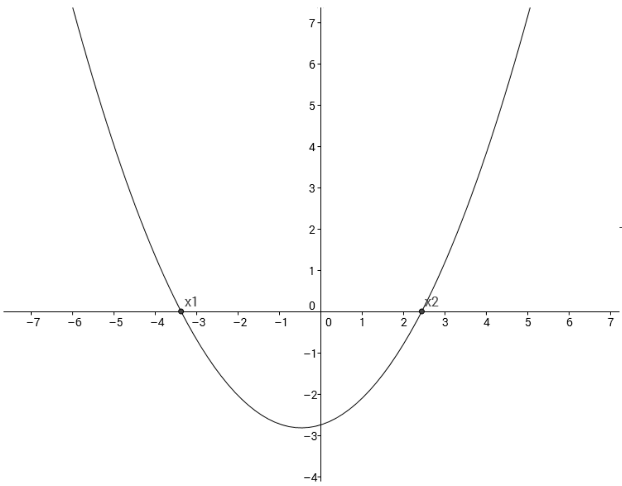
9. Ha x_1 az $x^2-5x+1=0$ egyenlet egyik megoldása, akkor igazold, hogy $x_1+\dfrac{1}{x_1}=5$

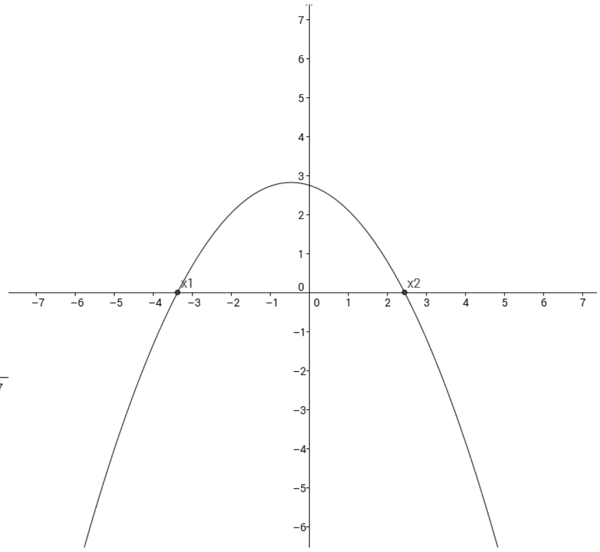
10. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ f(x)=2x+1$ függvény. Old meg az $f^2(x)-3f(x)=2$ egyenletet

E: $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

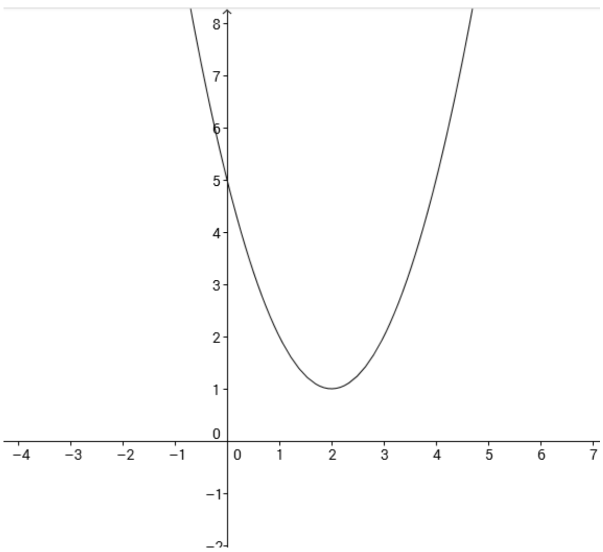
Grafikus kép:

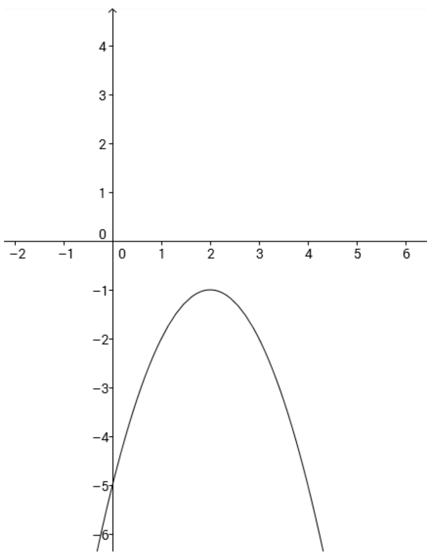
Ha $a > 0$ és $\Delta > 0$akkor a függvény grafikus k$x_d = 0x_2 = 5$épe: Ha $a < 0$ és $\Delta > 0$akkor a függvény grafikus képe:





Ha $a > 0$ és $\Delta < 0$akkor a függvény grafikus képe: Ha $a < 0$ és $\Delta < 0$akkor a függvény grafikus képe:





Ha egy $M(x_M, y_M)$ pont rajta van a függvény grafikus képén, az azt jelenti, hogy teljesül az $f(x_M) = y_M$ egyenlőség.

A parabola az Ox tengelyt az $(x_1, 0)$ illetve $(x_2, 0)$ pontokban metszi ha $\Delta \geq 0$, az Oy tengelyt az $(0, f(0))$ pontban. A csúcspont $V(x_V, y_V)$ ahol $x_V = -\frac{b}{2a}, y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ .akár pozitív, akár negatív a Δ.

Ha az $a < 0$ akkor maximumpontról beszélünk, maximuma a csúcspont y koordinátája vagyis

max(f(x)= $-\frac{\Delta}{4a}$ a csúcspontig növekvő, utána csökkenő.

Ha $a > 0$ akkor minimumpontja van a függvénynek, minimumát ugyanúgy számoljuk ki:

min(f(x)) = $-\frac{\Delta}{4a}$. A monotonitás tehát: a csúcspontig csökkenő, utána növekvő.

Gyakorlatok:

1.Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x-3$ függvényhez tartozó parabola csúcsának koordinátáit!

Megoldás: $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$ Tehát $x_V=-\frac{(-2)}{2\cdot1}=1, y_V=-\frac{\Delta}{4\cdot1}=-\frac{16}{4}=-4$

2.Igazold., hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-10x+25$ függvényhez tartozó parabola érinti az Ox tengelyt.

Megoldás: Az hogy a parabola érinti az Ox tengelyt, az az jelenti, hogy a csúcspont rajta van az Ox tengelyen, tehát y_V 0 kéne legyen. A képlet szerint $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(-10)^2-4\cdot1\cdot25}{4\cdot1}=-\frac{100-100}{4}=0$ Tehát valóban rajta van az Ox tengelyen.

3.Határozd meg azt a másodfokú függvényt, amelynek grafikus képe tartalmazza az $A(1;2)$, $B(0;1)$ és $C(2;9)$ pontokat

Megoldás: Legyen a függvény $f(x)=ax^2+bx+c$ Az. hogy az A pont hozzátartozik a függvény grafikus képéhez azt jelenti, hogy $f(x_A)=y_A$ azaz $f(1)=2$ vagyis

$a\cdot1^2+b\cdot1+c=2\ \langle=\rangle a+b+c=2$

Hasonló gondolatmenettel jutunk a következő egyenletrendszerhez: $\begin{cases} a+b+c=2 \\ c=1 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+1=2 \\ 4a+2b+1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+2b=8 \end{cases}$, az első egyenletből kifejezzük az a-t, $a=1-b$, behelyettesítjük a másodikba, tehát $4-4b+2b=8$, ezt megoldva $-2b=4$, azaz $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$ vagyis a keresett függvény:

$f(x)=3x^2-2x+1$

4.Adott az $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ függvény. Határozd meg az f függvényértékeinek halmazát!

Megoldás:Mivel $a=1$ tehát pozitív, így minimumpontunk van, a legkisebb érték amit a függvény felvehet, az a csúcspont y koordinátája. $y_v=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{0^2-4\cdot(-1)\cdot0}{4\cdot(-1)}=-\frac{0}{-4}=0.$ Nekünk a $[-1,2]$ intervallumon kell tekintenünk, ebbe beleesik a minimumpont, meg kell még vizsgálni, hogy az intervallum melyik végpontjában lesz nagyobb a kapott függvényérték. $f(-1)=(-1)^2=1$, $f(2)=2^2=4$ Tehát a függvény értékei a $[0,4]$ intervallumban helyezkednek el.

5.Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-8x+17$ függvényhez tartozó parabola csúcsa a $2x-y-7=0$ egyenletű egyenesen található. (Vagyis csúcspont koordinátái eleget tesznek az egyenletnek)

Megoldás: A képletek alapján $\Delta=(-8)^2-4\cdot1\cdot17=64-68=-4$, $x_V=-\frac{(-8)}{2\cdot1}=4, y_V=-\frac{\Delta}{4\cdot1}=-\frac{(-4)}{4}=1$. Ha ezeket behelyettesítjük a megadott egyenes egyenletébe, akkor $2\cdot4-1-7=0$ igaz egyenlőséghez jutunk.

Javasolt feladatok:

1.Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+12$ függvény. Igazold, hogy a függvényhez tartozó parabola csúcsának koordinátái egyenlők.

2.Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x-1$függvényhez tartozó parabola csúcsa a $2x+3y+8=0$ egyenletű egyenesen található. (Vagyis csúcspont koordinátái eleget tesznek az egyenletnek)

3.Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-6x+8$ függvényhez tartozó parabola csúcsának koordinátáit.

E: $x_V=1, y_V=5$

4. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x-3$ függvény grafikus képének a koordinátatengelyekkel való metszéspontjait. E: OY (0, -3) OX (-1, 0), (3, 0)

Előjel: Ha vannak valós gyökök, vagyis $\Delta>0$ akkor

Ha $a>0$

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$f(x)$	++++++++0----------0+++++++

Ha $a<0$

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$f(x)$	-------------0++++++0-----------

(a gyökökön kívül az a előjelével megegyező a függvény előjele, a gyökök között az a előjelével ellentétes)

Ha nincsenek valós gyökök, vagyis $\Delta<0$ akkor mindenhol az a előjelével megegyező a függvény előjele.

Gyakorlatok:

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$ függvény. Oldd meg az $f(x)\le 10$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: $f(x)\le 10 \Leftrightarrow x^2+1\le 10 \Leftrightarrow x^2-9\le 0$

Gyökök: $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1}=\frac{\pm 6}{2}=\pm 3$

x	$-\infty$ -3 3 $+\infty$
x^2-9	$+++++++++0$----- $0++++++++$

Tehát az előjeltáblázat alapján a megoldás a $[-3,3]$ intervallum.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+5$ függvény. Igazold, hogy $f(x)\ge 1$ bármely x valós számra.

Megoldás: $f(x)\ge 1 \Leftrightarrow x^2-4x+5\ge 1 \Leftrightarrow x^2-4x+4\ge 0$ ami igaz minden x-re, mert

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=16-16=0$, gyökei $x_1=x_2=\frac{-(-4)}{2\cdot 1}=2$,

$x^2-4x+4=(x-2)(x-2)=(x-2)^2$ tehát teljes négyzet.

3. Határozd meg az $(x+1)^2-3x-7<0$ egyenlőtlenség megoldásait az egész számok halmazán!

Megoldás: $(x+1)^2-3x-7<0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-3x-7<0 \Leftrightarrow x^2-x-6<0$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25$ $X_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2}$, *tehát* $x_1=-2, x_2=3$

Előjeltáblázat:

x	$-\infty$ -2 3 $+\infty$
x^2-x-6	$+++++++++0$-------- $0++++++$

A függvény tehát a gyökök között, a $(-2,3)$ intervallumon negatív, szigorúan kisebb mint 0. A megoldáshalmaz a az intervallumban benne levő egész számok. $M=\{-1,0,1,2\}$

4. Határozd meg az $\frac{x+4}{x^2-x+1}\ge 1$ egyenlőtlenség valós megoldásait!

Megoldás: $\frac{x+4}{x^2-x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^2-x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-x^2+x-1}{x^2-x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+3}{x^2-x+1} \geq 0$

Az $x^2 - x + 1 = 0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei ,mert $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ Mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív, így a nevező végig pozitív lesz.

A számláló esetében $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$ gyökök $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2\pm4}{-2}$ $x_1 = -1, x_2 = 3$

A tört akkor pozitív, ha a számláló és a nevező előjelei megegyeznek.

Előjeltáblázat:

x	$-\infty$ -1 3 $+\infty$
$-x^2+2x+3$	----------------0+++++0----------------
x^2-x+1	+++++++++++++++++++++++++++
$\frac{-x^2+2x+3}{x^2-x+1}$	----------------0+++++0----------------

A táblázatból kiolvasható, hogy a tört a $[-1,3]$ intervallumon lesz pozitív, és ez megoldása az eredeti egyenlőtlenségnek.

Javasolt feladatok:

1. Számítsd ki az $x^2 + 2x - 7 \leq 1$ egyenlőtlenség egész megoldásainak összegét. E: -7

2. Igazold, hogy $(x-4)(x+1) > x-9$, bármely $x \in \mathbb{R}$.

3.Oldd meg a $(x+1)^2 \leq 4$ egyenlőtlenséget! E: $[-5,3]$

4. Határozd meg az $x^2 - 16 \leq 0$ egyenlőtlenség valós megoldásait! E: $[-4,4]$

5. Igazold hogy minden valós x-re teljesül, hogy $(x+2)(3x-1) \leq 2(x-3)$.

6. Határozd meg az x szám valós értékeit, amelyekre $x(x+1) > x+9$. E: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

7. Határozd meg az $-x^2 - 5x + 6 \leq 0$ egyenlőtlenség valós megoldásait. E:$(-\infty, -6] \cup [1, +\infty)$

8. Oldd meg a valós számok halmazán az $(3x-1)(4x+2) \leq 10x^2 - 2x + 28$ egyenlőtlenséget.

E: $[-5,3]$

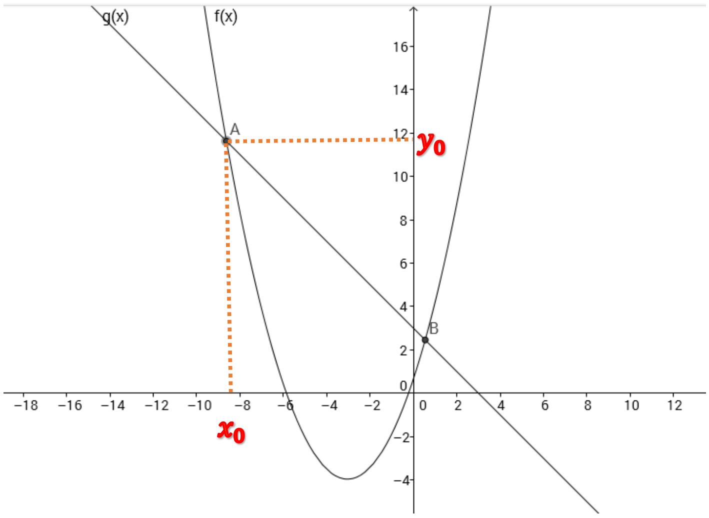
9. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$ függvény. Igazold, hogy $f(x) \leq f(1)$, bármely $x \in \mathbb{R}$.

10. Oldd meg az $(x^2-4)(x-1) \geq 0$ egyenlőtlenséget. E: $[-2,1] \cup (2, +\infty)$

Két függvény metszéspontjai: Azok a pontok, amelyek rajta vannak mindkét függvény grafikus képén, vagyis ugyanazokra a behelyettesítési értékekre egyenlő függvényértékeket adnak.

(ha $M(x_0, y_0)$ pont az $f(x)$, $g(x)$ függvények metszéspontja, akkor ez azt jelenti, hogy

$f(x_0) = g(x_0) = y_0$)



Gyakorlatok:

1.Határozd meg az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+1$ és $g(x)=2x+6$ függvények grafikus képeinek metszéspontjait.

Megoldás: $f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=2x_0+6 \Leftrightarrow x_0^2-4X_0-5=0$ Ennek gyökei: $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36$ $x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{4\pm6}{2}$ $x_1=-1, x_2=5$ Tehát két metszéspont lesz, $M_1(-1,f(-1))$ $M_2(5,f(5))$ Vagyis $M_1(-1,3)$ és $M_2(5,9)$

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$ függvény, és az $y=1$ egyenletű egyenes. Határozd meg az f függvény grafikus képe és az egyenes metszéspontjának koordinátáit!

Megoldás: Az $y=1$ egyenletű egyenes voltaképpen egy vízszintes egyenes. Tehát $f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow f(x_0)=1 \Leftrightarrow x_0^2-4x_0+5=1 \Leftrightarrow x_0^2-4x_0+4=0$ $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$

$x_0=\frac{-(-4)}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$. Tehát a metszéspont: $M(2,1)$. Mivel csak egy megoldás van, ez azt jelzi számunkra, hogy a vízszintes egyenes pont a csúcsponton megy át.

Javasolt feladatok:

1. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$ és $g(x)=3x-2$ függvények. Számítsd ki az f és g függvények grafikus képei metszéspontjainak koordinátáit! . E: $M_1(1,1)$ $M_2(3,7)$

2. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+3x-2$ és $g(x)=3x+6$ függvények. Számítsd ki az f és g függvények grafikus képei metszéspontjainak koordinátáit! . E: $M_1(-2,0)$ $M_2(2,12)$

3. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2$ és $g(x)=3-x$ függvények. Számítsd ki az f és g függvények grafikus képei metszéspontjainak koordinátáit! . E: $M_1(0,0)$ $M_2(3,-9)$

4. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$ és $g(x)=27$ függvények. Számítsd ki az f és g függvények grafikus képei metszéspontjainak koordinátáit! . E: $M_1(-5,27)$ $M_2(5,27)$

5. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x-1$ és $g(x)=3x-7$ függvények. Számítsd ki az f és g függvények grafikus képei metszéspontjainak koordinátáit! . E: $M_1(-3,-16)$ $M_2(2,-1)$

Gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viete féle formulák)

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1, x_2 valós számok, jelöljük az összegüket: $S = x_1 + x_2$ és a szorzatukat: $P = x_1 \cdot x_2$. Akkor ezek kiszámíthatóak a következő módon:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Igazolható, hogy $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$ illetve $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3P$

Fordítva, ha ismerjük két szám összegét és szorzatát, $x_1 + x_2 = S$ illetve $x_1 \cdot x_2 = P$ akkor az

$x^2 - Sx + P = 0$ egy olyan másodfokú egyenletet, amelyiknek a gyökei ezek a számok.

Gyakorlatok:

1.Számítsd ki $x_1 + x_2 + x_1x_2$, ha x_1 és x_2 az $x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenlet megoldásai.

Megoldás: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3$ $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

Tehát $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 3 + 1 = 4$ Könnyebben és gyorsabban meg tudjuk így oldani a feladatot, mintha meg kéne oldanunk az egyenletet és megkeresnénk a gyököket.

2.Adott az $x^2 + 2x - 6 = 0$ egyenlet, amelynek megoldásai x_1 és x_2. Számítsd ki $x_1^2 + x_2^2$.

Megoldás: Az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés az $(x_1 + x_2)^2$ négyzetből fejezhető ki:

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Longrightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ Általánosítva a: $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

Mivel $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$ és $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{1} = -6$, így a kért kifejezés értéke:

$x_1^2 + x_2^2 = (-2)^2 - 2 \cdot (-6) = 4 + 12 = 16$

3. Határozz meg egy olyan másodfokú egyenletet, amelynek x_1 és x_2 gyökei egyidejűleg teljesítik az $x_1 + x_2 = 3$ és $x_1x_2 = -3$ összefüggéseket!

Megoldás: $S = x_1 + x_2 = 3$ és $P = x_1 \cdot x_2 = -3$ Tehát a keresett egyenlet: $x^2 - Sx + P = 0$ vagyis: $x^2 - 3x - 3 = 0$

4. Számítsd ki $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ értékét, ha x_1 és x_2 az $x^2 - 2015x + 1 = 0$ egyenlet megoldásai.

Megoldás: közös nevezőre hozzuk az összeget $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2015)}{1} = 2015 \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

Tehát $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2015}{1} = 2015$

Javasolt feladatok:

1. Számítsd ki $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, ha x_1 és x_2 az $x^2 - 6x - 2 = 0$ egyenlet megoldásai. E: -3

2. Határozz meg egy olyan másodfokú egyenletet, melynek x_1 és x_2 gyökei egyidejűleg kielégítik az $x_1 + x_2 = 5$ és $x_1x_2 = -3$ összefüggéseket. E: $x^2 - 5x - 3 = 0$

3.Igazold, hogy az $x^2 - 4x - 1 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 megoldásai teljesítik az $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 14$ összefüggést.

4.Ha tudjuk, hogy az a és b számok összege 5 és szorzata -3, számítsd ki a^2+b^2. E: 31

5. Ha x_1 és x_2 megoldásai az $x^2-2x-2=0$ egyenletnek, számítsd ki az $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ kifejezés értékét. E: 4

Egyenletrendszerek (egy első és egy másodfokúból álló két ismeretlenes egyenletrendszer).

Az olyan egyenletrendszereket, amelyekben egy elsőfokú és egy másodfokú egyenlet szerepel, kétféleképpen lehet megoldani. Az első módszer, hogy kifejezzük az egyik változót az elsőfokúból és behelyettesítjük a másodfokúba, majd azt megoldjuk. A második módszer abból áll, hogy ha lehetséges, kiszámítjuk a két ismeretlen összegét és szorzatát, felírjuk a rezolvens másodfokú egyenletet, majd megoldjuk azt. A kapott gyökök az egyenletrendszer megoldásai. Ilyenkor $x=x_1$ $y=x_2$illetve fordítva, $x=x_2$ $y=x_1$ lesznek a megoldások.

Gyakorlatok:

1. Oldd meg a $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x^2-3x+4=y \end{cases}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Kifejezzük az első egyenletből az y –t mert azt az egyszerűbb.

$3x-y=1 \Leftrightarrow 3x=1+y \Leftrightarrow y=3x-1$, majd behelyettesítjük a másodikba.

$x^2-3x+4=3x-1 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0.\ \Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(5)=16,\ x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}$
Tehát $x_1=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1,\ x_2=\frac{6+4}{2}=5.$

I. Eset $x_1=1 \Rightarrow y_1=3\cdot1-1=2$
II. Eset $x_2=5 \Rightarrow y_2=3\cdot5-1=14$

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van: $(1{,}2)$ illetve $(5{,}14)$ számpárok.

2. Oldd meg a $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$. egyenletrendszert

Megoldás: Az a rezolvens másodfokú egyenlet, amelyiknek gyökei eleget tesznek az egyenletrendszernek: $t^2-St+P=0 \iff t^2-2t-3=0$ Gyökök: $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$ $t_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\pm4}{2}$ $t_1=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ $t_2=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$

Mivel az egyenletrendszer szimmetrikus, két megoldás van: $\mathrm{x}=1, y=3$ illetve $x=3$ $y=1$

3. Old meg az $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Az első módszerrel: Kifejezzük a második egyenletből az y-t és behelyettesítjük az elsőbe.

$y=5-x=3x^2+(5-x)^2=13 \Leftrightarrow x^2+25-10x+x^2=13 \Leftrightarrow 2x^2-10x+12=0.$
Végigosztunk 2-vel: $x^2-5x+6=0$ ennek megoldásai: $x_1=3$ $x_2=2$. Vagyis $M=\{(3{,}2);(2{,}3)\}$

Második módszer: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$. Mivel $x+y=5$, ezért kapjuk,hogy $x^2+y^2=(5)^2-2xy=13$ Amiből következik, hogy $xy=\frac{25-13}{2}=\frac{12}{2}=6$ Felírjuk a rezolvens egyenletet :

$t^2-5t+6=0$ Megoldásai 2 és 3, tehát így is megkaptuk a két számpárt.

Javasolt feladatok:

1. Oldd meg az $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2-2x+3y=5 \end{cases}$ egyenletrendszert! E: $M=\{(1{,}2);(4,-1)\}$

2. Oldd meg az $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=x^2-5x-2 \end{cases}$ egyenletrendszert. E: $M=\{(0,-2);(7,12)\}$

3.Oldd meg a következő egyenletrendszert $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-x=2y \end{cases}$. E: $M=\{(-1,1);(4,-1)\}$

4. Oldd meg az $\begin{cases} x+y=-8 \\ xy=12 \end{cases}$ egyenletrendszert. E: $M=\{(-2,-6);(-6,-2)\}$

5.Oldd meg az $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=18 \end{cases}$ egyenletrendszert. E: $M=\{(3,6);(6,3)\}$

6.Oldd meg a $\begin{cases} 3x+3y=12 \\ xy=-5 \end{cases}$ egyenletrendszert.. E: $M=\{(-1,5);(5,-1)\}$

7. Oldd meg a $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+y^2-2xy=1 \end{cases}$ egyenletrendszert.. E: $M=\left\{(1,2);\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)\right\}$

8. Oldd meg a $\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+y^2+3xy=1 \end{cases}$ egyenletrendszert.. E: $M=\{(-3,1);(3,-1)\}$

9. Oldd meg a $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy-x+y=-11 \end{cases}$ egyenletrendszert.. E: $M=\{(-5,4);(2,-3)\}$

10. Oldd meg a $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ egyenletrendszert.. E: $M=\{(1,4);(4,1)\}$

Paraméteres feladatok

1. Határozd meg azokat az m valós számokat, amelyekre az $x=2$ megoldása az $mx^2+(2m-5)x-m^2+3=0$ egyenletnek.

Megoldás: Ha 2 gyöke az egyenletnek, akkor $m\cdot 2^2+(2m-5)\cdot 2-m^2+3=0 \Leftrightarrow 4m+4m-10-m^2+3=0 \Leftrightarrow -m^2+8m-7=0$ Ennek megoldásai $m_1=1$ $m_2=7$.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+1$ függvény. Határozd meg az m valós szám értékeit, amelyekre az $A(m,1)$ pont az f függvény grafikonján található

Megoldás: Az hogy az A pont a függvény grafikonján van rajta, azt jelenti, hogy $f(x_A)=y_A$ vagyis

$m^2-5m+1=1 \Leftrightarrow m^2-5m=0$, melynek gyökei:

$m_1=0 \quad m_2=5$

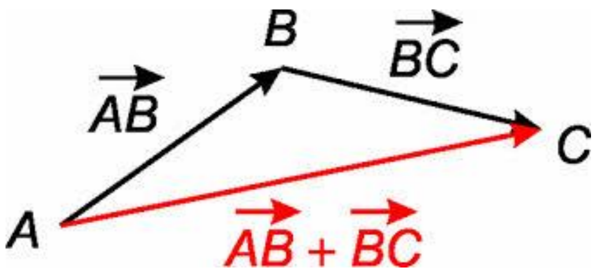
5. Fejezet: Vektorok

Vektor ellentétes vektora:

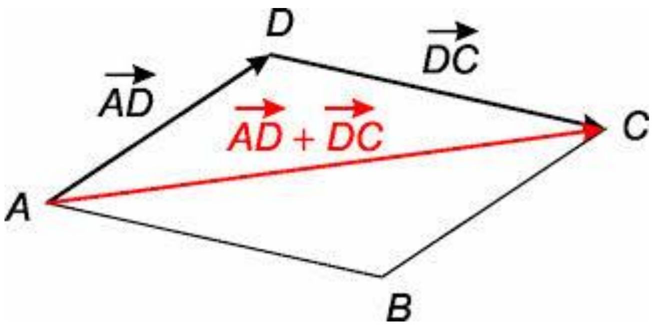
Az $\overrightarrow{AB}$ vektor ellentétese a $\overrightarrow{BA}$ vektor, tehát $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Vektorok összeadása:

1. Háromszög szabály: Legyen A, B és C a sík három pontja, akkor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



2. Paralelogramma szabály: Legyen A, B és C a sík három pontja. Megszerkesztjük az ABCD paralelogrammát, akkor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$



A sík négy tetszőleges A, B, C, D pontja esetén felírhatjuk, hogy:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, ha pedig A=C akkor, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, ha pedig A=D, akkor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Két pont közötti távolság

Legyen $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ a sík két pontja, akkor az A és B pont közötti távolság: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Háromszög kerülete

Az ABC háromszögben $K_{ABC\Delta} = AB + AC + BC$

Megoldott feladatok:

1. Számítsd ki $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ összeget, tudva, hogy A, B, C pontok egy háromszög csúcsai.
   Megoldás
   $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

2. Számítsd ki a $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ összeget ha A, B, C, D a sík különböző pontjai.
   Megoldás
   $$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

3. Bizonyítsd be, hogy az ABCD konvex négyszögben igaz az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ összefüggés.
   Megoldás
   Tudva, hogy ABCD négyszögben $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

4. Igazold, hogy az ABCD négyszögben $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$.
   Megoldás
   Mivel ABCD négyszögben $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$

5. Bizonyítsd be, hogy az ABCD konvex négyszögben igaz az $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ összefüggés.
   Megoldás
   Tudva, hogy ABCD négyszögben $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

6. Számítsd ki az AB szakasz hosszát az xOy derékszögű koordinátarendszerben, ha:
   a) A(3,5) és B(2,5)
   b) A(-3, 4) és B(2,2)
   c) A(4,5) és B(-1,3)
   d) A(-3,-5) és B(2,5)
   e) A(3,5) és B(-2,-5)

   Megoldás: a) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

   b) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

   c) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(4-(-1)\right)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

   d) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

   e) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(3-(-2)\right)^2 + \left(5-(-5)\right)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

7. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben számítsd ki az ABC háromszög kerületét, ha A(1,2), B(-1, 1), C(3,3).

   Megoldás

   $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

   $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

   $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   $K_{ABC\Delta} = AB + AC + BC = \sqrt{5} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

8. Számítsd ki az ABC háromszög kerületét, ha csúcsainak koordinátái az xOy derékszögű koordinátarendszerben $A(-1,3), B(-2,0)$ és $C(0,3)$

Megoldás

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(-1-(-2)\right)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9}$
$= \sqrt{13}$

$K_{ABC\Delta} = AB + AC + BC = \sqrt{10} + 1 + \sqrt{13}$

9. Számítsd ki az ABC háromszög kerületét, ha csúcsainak koordinátái az xOy derékszögű koordinátarendszerben ha A(1,2), B(3,1) és C(5,2)

   Megoldás

   $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

   $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4$

   $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

   $K_{ABC\Delta} = AB + AC + BC = \sqrt{5} + 4 + \sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5}$

10. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben számítsd ki az ABC háromszög kerületét, ha A(1,-2), B(5, 0), C(1,2).

    Megoldás

    $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$
    $= 2\sqrt{5}$

    $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

    $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

    $K_{ABC\Delta} = AB + AC + BC = 2\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5}$

11. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben számítsd ki az MNP háromszög kerületét, ha M(1,1), N(3, 4), P(5,1).

    Megoldás

    $MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

    $NP = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

    $MP = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

    $K_{MNP\Delta} = MN + NP + MP = 2\sqrt{13} + 4$

12. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben számítsd ki az ABC háromszög kerületét, ha A(-6,2), B(-2,- 1), C(2,2).

Megoldás

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(-6-(-2)\right)^2 + \left(2-(-1)\right)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25}$
$= 5$

$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-6-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$K_{ABC\Delta} = AB + AC + BC = 5 + 5 + 4 = 14$

13. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az A(1,1), B(4,1) és C(4,4) pontok. Igazold, hogy AB=BC.

Megoldás

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

tehát AB=BC=3

14. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az A(5,2), B(4,5) és C(2,1) pontok. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú.

Megoldás

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$
$= 2\sqrt{5}$

Mivel AC=BC=$\sqrt{10}$ $\Longrightarrow$ ABC háromszög egyenlő szárú.

15. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az A(2,2), B(2,5) és C(6,5) pontok. Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű.

Megoldás

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9}$
$= \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

Mivel $5^2 = 3^2 + 4^2$ vagyis $AC^2 = AB^2 + BC^2$ Pitagorasz fordított tételéből következik, hogy az ABC háromszög derékszögű.

16. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az M(1,1), N(3, 4), P(5,1) pontok. Igazold, hogy az MNP háromszög egyenlő szárú.

Megoldás

$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$NP = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$MP = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

$MN = NP = \sqrt{13} \Longrightarrow$ MNP háromszög egyenlő szárú.

17. Határozd meg az a azon értékeit, amelyekre az $A(-1,2)$ és $B(4-a, 4+a)$ pontok által meghatározott szakasz hossza 5.

Megoldás

$$AB = \sqrt{(5-a)^2 + (-2-a)^2} = 5 \Rightarrow 25 - 10a + a^2 + 4 + 4a + a^2 = 25 \Rightarrow 2a^2 - 6a + 4 = 25 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a \in \{1,2\}$$

18. Határozd meg azt a valós, pozitív *a* számot, amelyre az $A(2,-1)$ és $B(-1,a)$ pontok közötti távolság 5.

Megoldás

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-a)^2} = 5 \Rightarrow a^2 + 2a + 10 = 25 \Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Rightarrow a \in \{-5,3\} \cap R_+ = \{3\}$$

19. Határozd meg az *a* valós szám értékeit, ha az $A(2;1)$ és $B(7;a)$ pontok távolsága 13.

Megoldás

$$AB = \sqrt{(2-7)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{169} \Rightarrow (a-1)^2 = 144 \Rightarrow a \in \{-11,13\}$$

20. Adott az xOy derékszögű koordinátarendszerben az $M(2,m)$ pont, ahol m egy valós szám. Határozd meg az m valós értékeit, amelyekre $OM = \sqrt{5}$.

Megoldás

$$OM = \sqrt{(0-2)^2 + (0-m)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow m^2 + 4 = 5 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m \in \{-1,1\}$$

21. Határozd meg $m \in \mathbb{R}$ értékét, amelyre az $A(2,m)$ és $B(-m,-2)$ pontok közötti távolság $4\sqrt{2}$.

$$AB = \sqrt{(2+m)^2 + (m+2)^2} = \sqrt{32} \Rightarrow 2(m+2)^2 = 32 \Rightarrow (m+2)^2 = 16 \Rightarrow$$
$m \in \{-6,2\}$

Javasolt feladatok:

1. Számítsd ki $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$ összeget, tudva, hogy M, N, P pontok egy háromszög csúcsai.
   E: $\vec{0}$

2. Számítsd ki az $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB}$ összeget ha A, B, D, E a sík különböző pontjai.
   E: $\overrightarrow{AE}$

3. Számítsd ki az $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MQ}$ különbséget ha M, N, Q a sík különböző pontjai.
   E: $\overrightarrow{QN}$

4. Számítsd ki a $\overrightarrow{QN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$ művelet eredményét, tudva, hogy M, N, P, Q pontok a sík különböző pontjai.
   E: $\vec{0}$

5. Számítsd ki a $\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MN}$ művelet eredményét, tudva, hogy M, N, P, Q, S pontok a sík különböző pontjai.
   E: $\overrightarrow{MS}$

6. Igazold, hogy az ABCD konvex négyszögben $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}$.

7. Igazold, hogy az MNPQ konvex négyszögben $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}$.

8. Igazold, hogy az MNPQ konvex négyszögben $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MQ}$.

9. Bizonyítsd be, hogy az MNPQ konvex négyszögben igaz az $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$ összefüggés.

10. Bizonyítsd be, hogy az MNPQ konvex négyszögben igaz az $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}$ összefüggés.

11. Számítsd ki az AB szakasz hosszát az xOy derékszögű koordinátarendszerben, ha:

a) A(2,4) és B(3,1)	E: $\sqrt{10}$
b) A(-5,3) és B(2,5)	E: $\sqrt{53}$
c) A(1,-2) és B(-2,4)	E: $3\sqrt{5}$
d) A(3,0) és B(-2,-5)	E: $5\sqrt{2}$
e) A(-2,-2) és B(2,1)	E: 5
f) A(-2,-4) és B(-3,-1)	E: $\sqrt{10}$
g) A(2,-4) és B(5,0)	E: 5
h) A(9 ,1) és B(-3,-4)	E: 13
i) A(-7,-3) és B(-5,-2)	E: $\sqrt{5}$
j) A(-7,-3) és B(5,2)	E: 13

12. Számítsd ki az ABC egyenlő oldalú háromszög kerületét, tudva, hogy A(-1;1) és B(3;-2)
E: $K_{ABC\Delta}=3AB=15$

13. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az M(1,1), N(3, 1), P(3,3) pontok. Igazold, hogy az MNP háromszög egyenlő szárú.
E: MN=NP=2

14. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az M(1,3), N(3, 4), P(1,5) pontok. Igazold, hogy az MNP háromszög egyenlő szárú.
E: MN=NP=$\sqrt{5}$

15. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az M(1,2), N(2, 3), P(3,2) pontok. Igazold, hogy az MNP háromszög egyenlő szárú.
E: MN=NP=$\sqrt{2}$

16. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az M(-6,2), N(-2, -1), P(2,2) pontok. Igazold, hogy az MNP háromszög egyenlő szárú.
E: MN=NP=5

17. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben számítsd ki az ABC háromszög kerületét, ha A(1,2), B(5, 2), C(3,-1).
E: $K_{ABC\Delta}=4+2\sqrt{13}$

18. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben számítsd ki az ABC háromszög kerületét, A(-1,3), B(-2, 0), C(0,3).
 E: $K_{ABC\Delta} = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{13}$

19. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az A(-1,-1), B(1,1) és C(0,-2) pontok. Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű.
 E: AB=$2\sqrt{2}$, AC=$\sqrt{2}$, BC=$\sqrt{10}$

20. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az M(2,0), N(6,4) és P(6,-4) pontok. Igazold, hogy az MNP háromszög derékszögű.
 E: MN=$\sqrt{32}$, MP=$\sqrt{32}$, NP=8

21. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az A(5,6), B(2,6) és C(5,2) pontok. Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű.
 E: AB=3, AC=4, BC=5

22. Határozd meg az a azon értékeit, amelyekre az A(2,1) és B(a,a) pontok által meghatározott szakasz hossza 5.
 E: $a \in \{-2,5\}$

23. Határozd meg az a azon értékeit, amelyekre az A(a+5,a-3) és B(-3,-4) pontok által meghatározott szakasz hossza 13.
 E: $a \in \{-13,4\}$

24. Határozd meg azt a valós, pozitív a számot, amelyre az A(a,-3) és B(5,-0) pontok közötti távolság 5.
 E : $a \in \{1,9\}$

25. Határozd meg azt a valós, pozitív a számot, amelyre az A(-7,-3) és B(5,a) pontok közötti távolság 13.
 E: $a \in \{2\}$

26. Határozd meg az a valós szám értékeit, ha az A(1,-2) és B(a,4)pontok távolsága $3\sqrt{5}$.
 E: $a \in \{-2,4\}$

27. Határozd meg az a valós szám értékeit, ha az A(3,a) és B(-2,-5)pontok távolsága $5\sqrt{2}$.
 E: $a \in \{-10,0\}$

28. Adott az *xOy* derékszögű koordinátarendszerben az M(4,m)pont, ahol m egy valós szám. Határozd meg az m valós értékeit, amelyekre $\mathrm{OM} = 2\sqrt{5}$.
 E: $m \in \{-2,2\}$

29. Adott az *xOy* derékszögű koordinátarendszerben az M(5,m) pont, ahol m egy valós szám. Határozd meg az m valós értékeit, amelyekre $\mathrm{OM} = \sqrt{29}$.
 E: $m \in \{-2,2\}$

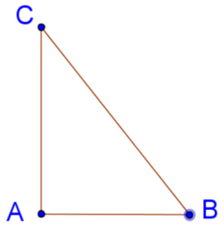
30. Határozd meg $m \in \mathbb{R}$ értékét, amelyre az A(m+1,m+3) és B(3,1) pontok közötti távolság $\sqrt{10}$.
 E: $m \in \{-1,1\}$

31. Határozd meg $m \in \mathbb{R}$ értékét, amelyre az A(-2,m) és B(-3,-1) pontok közötti távolság $\sqrt{10}$.
E: $m \in \{-4,2\}$

6. Fejezet: A trigonometria mértani alkalmazásai

A háromszög elemei: AB = c, AC = b, BC = a, m(Â) = A, m(B̂) = B, m(Ĉ) = C.

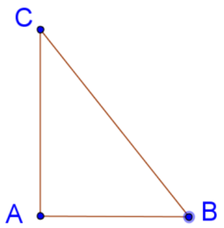
Pitagorasz tétele :



Bármely derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.

Tehát bármely ABC háromszögben, ha A = 90° (az átfogó BC, a befogók AB és AC) akkor **$BC^2 = AB^2 + AC^2$**.(Ha ismert a két befogó kiszámítható az átfogó.)
Következmény: **$AB^2 = BC^2 – AC^2$** illetve **$AC^2 = BC^2 – AB^2$** (Ha ismert az átfogó és az egyik befogó kiszámítható az ismeretlen befogó.)

Érvényes **Pitagorasz tételének fordított tétele** : Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzete egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.



$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$ az ABC háromszög derékszögű m(Â) = 90°

Megoldott feladatok:

a) Az ABC háromszögben m(Â) = 90°, AB = 5, AC = 12. Számítsd ki a BC oldal hosszát.
Megoldás: Az ABC háromszög A-ban derékszögű és ismert a két befogó hossza. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Tehát $BC = \sqrt{169} = 13$.

b) Az MNP háromszögben m(P̂) = 90°, NP = 6, MN = $3\sqrt{6}$. Számitsd ki az MP oldal hosszát.

Megoldás: Az MNP háromszög P-ben derékszögű és ismert az egyik befogó és az átfogó. Alkalmazzuk Pitagorasz tételének következményét:

$MP^2 = MN^2 – NP^2$

$MP^2 = (3\sqrt{6})^2 – 6^2 = 54 – 36 = 18$

Tehát $MP = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

c) Az ABC háromszög oldalai AC = 5, BC = 13, AB = 12. Igazold, hogy a háromszög derékszögű.
Megoldás: Alkalmazzuk Pitagorasz tételének fordított tételét :

Ellenőrizzük, hogy $13^2 = 12^2 + 5^2$

$169 = 144 + 25$

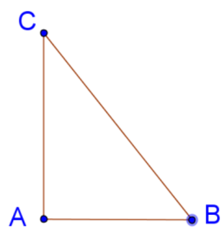
$169 = 169$ igaz az egyenlőség ⇒ az ABC háromszög derékszögű, BC az átfogó (a leghosszabb oldal) tehát m(Â) = 90°.

Szögfüggvények a derékszögű háromszögben:

Legyen az ABC háromszögben m(Â)= 90°.

$\sin B = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$, $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$.

$\cos B = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$, $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$



$\operatorname{tg} B = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$\operatorname{ctg} B = \frac{szög\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$, $\operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$.

Néhány összefüggés a szögfüggvények között:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin x = \cos(90° - x)$; $\cos x = \sin(90° - x)$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(90° - x)$; $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$

$tgx = \frac{sinx}{cosx}$; $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$

Szögfüggvény értékek táblázata:

x	30°	45°	60°
sinx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgx	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

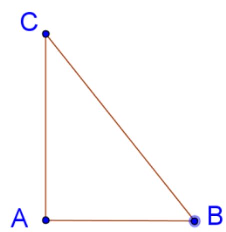
Megoldott feladatok:

a) Az ABC derékszögű háromszögben (m(Â) = 90°), bizonyítsátok be, hogy $\cos^2 B + \cos^2 C = 1$

Megoldás: $\cos^2 B = \frac{AB^2}{BC^2}$

$\cos^2 C = \frac{AC^2}{BC^2}$

$\cos^2 B + \cos^2 C = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$,



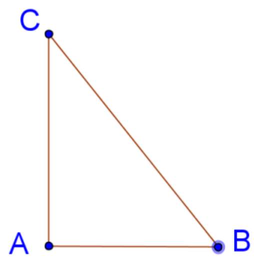
de $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Pitagorasz tételének értelmében) tehát

$\cos^2 B + \cos^2 C = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

b)Számítsátok ki sin B + sin C értékét az ABC háromszögben, ahol m(A)= 90°, *AB* = 9, *AC* = 12.

Megoldás: Először ki kell számítanunk az átfogó hosszát.

Pitagorasz tétele alapján $BC^2 = AB^2 + AC^2$



$BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

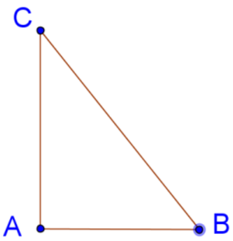
$BC = 15$

Az értelmezés szerint $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ tehát

$\sin B + \sin C = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.

c)Az ABC háromszögben m(Â) = 90°, m(Ĉ) = 30° és BC = 20. Számítsd ki a háromszög kerületét.

Megoldás: $\mathbf{K_{ABC} = AB + AC + BC.}$ Ki kell számítanunk a két befogó hosszát.



Mivel egy oldalt és szöget ismerünk szögfüggvények segítségével számítjuk ki az oldalakat.

$\sin C = \frac{AB}{BC}$

$\sin 30° = \frac{AB}{20} \Rightarrow AB = 20 \cdot \sin 30° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

$m(\hat{B}) = 90° - 30° = 60°$

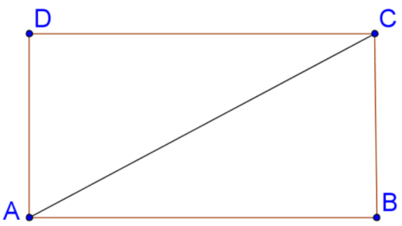
$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin 60° = \frac{AC}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 10\sqrt{3}$

$K_{ABC} = 10 + 10\sqrt{3} + 20 = 30 + 10\sqrt{3}$

Megjegyzés: Az AC oldalt kiszámíthattuk volna Pitagorasz tételével is:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 400 - 100 = 300 \Rightarrow AC = 10\sqrt{3}$.

d)Az ABCD téglalapban adott m(DÂC) =60°, BC = 18. Számítsátok ki az AB oldal hosszát.



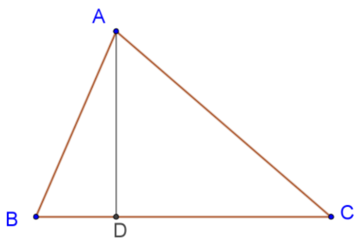
Megoldás: ABCD téglalapban AB párhuzamos CD, AC szelő⇒ m(AĈB) = 60°. Az ABC háromszögben m(B̂) = 90

m(AĈB) = 60°, BC = 18. $\mathrm{tg}C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \mathrm{tg}60° = \frac{AB}{18} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{18}$, tehát $AB = 18\sqrt{3}$.

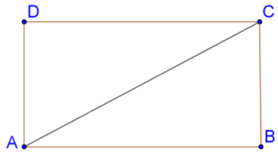
<u>Terület képletek: A háromszög területe:</u> $\mathbf{T_{ABC} = \frac{alap \cdot magasság}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}}$

$T_{ABC} = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{ac\sin B}{2} = \frac{bc\sin A}{2}$

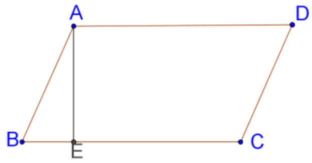
$T_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ahol $p = \frac{a+b+c}{2}$



A téglalap területe: T_{ABCD} = $\boldsymbol{hosszúság \cdot szélesség}$ **= AB ·** $\boldsymbol{BC}$

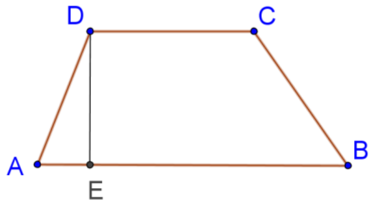


A paralelogramma területe: T_{ABCD} **= alap·magasság = BC · AE**



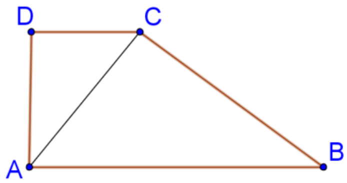
A trapéz területe : $T_{ABCD} = \dfrac{(\boldsymbol{kis\ alap+nagy\ alap})\cdot \boldsymbol{magasság}}{\boldsymbol{2}}$

$T_{ABCD} = \dfrac{(\boldsymbol{AB+CD})\cdot \boldsymbol{DE}}{\boldsymbol{2}}$



Megoldott feladatok:

a) Az ABCD derékszögű trapézban az alapok AB és CD és a magasság AD. Tudva azt, hogy m(AĈB) = 90°, m(AB̂C) = 30° és AC = 6, számítsátok ki az ABCD trapéz területét.
Megoldás:



Az ABC háromszögben m(Ĉ) = 90°, tehát alkalmazhatók a szögfüggvények.

sinB = $\frac{AC}{AB}$ ⇒ sin30° = $\frac{6}{AB}$ ahonnan AB = $\frac{6}{sin30°}$ = 6·2 = 12

m(BÂC) = 90° - m(AB̂C) = 90° - 30° = 60°

m(DÂC) = 90° - m(BÂC) =90° - 60° = 30°.

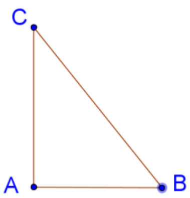
A DAC háromszögben m(AD̂C) = 90° tehát alkalmazhatók a szögfüggvények:

sinA = $\frac{DC}{AC}$ vagyis sin30° = $\frac{DC}{6}$ ⇒ DC = 6 · sin30° = 3

cosA = $\frac{AD}{AC}$ ⇒ cos30° = $\frac{AD}{6}$ ahonnan AD = 6· cos30° = 6 · $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $3\sqrt{3}$.

A trapéz területe $T_{ABCD} = \frac{(AB+DC)AD}{2} = \frac{(12+3)\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{2}$.

b) Az ABC háromszögben m(Â) = 90°, m(B̂) = 30°, AC = 4. Számítsátok ki az ABC háromszög területét.
Megoldás:



$T_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2}$

Ki kell számítanunk az AB szakasz hosszát: ctgB = $\frac{AB}{AC}$

ctg30° = $\frac{AB}{4}$ ⇒ AB = 4 · ctg30° = $4\sqrt{3}$

$T_{ABC} = \frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

Összefüggések az általános háromszögekben

Szinusz tétel: Bármely ABC háromszögben $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$ = 2R, ahol R a háromszög köré irt kör sugara.

Koszinusz tétel: Bármely ABC háromszögben $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$

$(b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cosB$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC\ )$

Következmény: cosA = $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

cosB = $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

cosC= $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Megoldott feladatok:

a)Az ABC háromszögben m(Â) = 30°, m(B̂) = 45° és BC = $\sqrt{2}$. Számitsátok ki az AC oldal hosszát.

Megoldás: Alkalmazzuk a szinusz tételt (BC=a, AC = b)

$$\frac{BC}{sinA} = \frac{AC}{sinB}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{sin30°} = \frac{AC}{sin45°} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}sin45°}{sin30°} = 2$$

b)Az ABC háromszögben BC = 3, AC = 5, AB = 7. Számítsátok ki cos B értékét.

Megoldás: Alkalmazzuk a koszinusz tétel következményét (AB= c, AC = b, BC = a)

$$cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{9+49-25}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{33}{14 \cdot 3} = \frac{11}{14}.$$

Javasolt feladatok:

1. Az ABC derékszögű háromszög átfogója BC = 10 és befogója AC = 5. Számítsátok ki az ABC háromszög területét. ($T_{ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$)
2. Az ABC háromszögben BC = 3, AC = 5 és m(AĈB) = 120°. Számítsátok ki az AB oldal hosszát. (AB = 7)
3. Az ABC derékszögű háromszögben m(Â) = 90°, AC = 3 és BC = 6. Számítsátok ki az ABC háromszög kerületét. ($K_{ABC} = 9 + 3\sqrt{3}$)
4. Adott az ABC (AB = AC) egyenlő szárú háromszög, amelyben BC = 20 és m(Â) = 120°. Számítsátok ki az ABC háromszög területét. ($T_{ABC} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$)
5. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög területét,ha m(Â) = 90°, m(Ĉ) = 30°, BC = 12. ($T_{ABC} = 18\sqrt{3}$)
6. Az ABC háromszögben m(Â) = 90°, AB = 6, BC = $3\sqrt{6}$. Számitsátok ki az ABC háromszög területét. ($T_{ABC} = 9\sqrt{3}$)
7. Az ABC általános háromszögben AC = 2, AB = 4 és m(Â) = 60°. Számítsátok ki a BC oldal hosszát. (BC = $2\sqrt{3}$)
8. Az ABC háromszögben m(Â) = 90°, BC = 16, m(B̂) = 45°. Számítsátok ki az ABC háromszög területét. (T_{ABC} =64)
9. Az ABCD téglalapban adott AB = 12, m(BÂC) = 30°. Számítsátok ki az AC átló hosszát. (AC = $8\sqrt{3}$)
10. Az ABC háromszögben adottak BC = 5, m(Â) = 30°, m(B̂) = 45°. Számítsátok ki az AC oldal hosszát. (AC = $5\sqrt{2}$)

11. Az ABC háromszögben $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{C}) = 30°$ és $BC = 10$. Számítsátok ki a derékszög csúcsából húzott magasság hosszát. ($m = \frac{5\sqrt{3}}{2}$)
12. Az ABC háromszögben $m(\hat{A}) = 90°$, $BC = 10$ és $\cos C = 0,6$. Számítsátok ki az ABC háromszög kerületét. ($K_{ABC} = 24$)
13. Az ABC háromszögben $AC = 3$, $AB = 5$, $m(\hat{A}) = 60°$. Számítsátok ki a BC oldal hosszát. ($BC = \sqrt{19}$)
14. Bizonyítsátok be, hogy bármely ABC derékszögű háromszögben, ahol $m(\hat{A}) = 90°$, teljesül a $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$ egyenlőség.
15. Az ABC derékszögű háromszögben $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{C}) = 30°$, $AC = 8$. Számítsd ki a derékszög csúcsából húzott magasság hosszát. ($m = 4$)
16. Az ABC háromszögben $m(\hat{A}) = 90°$, az átfogóhoz tartozó oldalfelező hossza 5 cm és az AB befogó szintén 5 cm. Számítsátok ki az AC oldal hosszát. ($AC = 5\sqrt{3}$)
17. Egy egyenlő szárú trapéz egyik szöge 45° és a trapéz magassága $\sqrt{2}$. Határozzátok meg a trapéz nem párhuzamos oldalai hosszának összegét. (4)

10. osztály

1. Fejezet Hatványok, gyökmennyiségek

Alapok:

Értelmezés: Ha $a \in R$, $n \in N*$ akkor $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n tényező).

Ha $a \in R*$, $n \in N*$ akkor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ha $a \in R*$ és $n = 0$, akkor $a^0 = 1$.

Elnevezések: a – hatvány alap, n -hatványkitevő, a^n- hatvány

Értelmezés: Ha $a \geq 0$ és $n \in N, n \geq 2$ (n – gyökkitevő) akkor $\sqrt[n]{a}$ az a pozitív valós szám, amelynek az n – edik hatványa a –val egyenlő. ($\sqrt[n]{a} = b, b \geq 0 \Leftrightarrow b^n = a$)

Ha $a < 0$ és $n \in N, n > 2$ páratlan természetes szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ az a negatív valós szám amelynek az n-edik hatványa a-val egyenlő.

Ha $a \geq 0$ és $m \in Z^*$, $n \in N^*$, $n \geq 2$ akkor $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Megjegyzések: 1. Pozitív valós szám bármilyen hatványa pozitív, negatív valós szám páros hatványa pozitív, páratlan hatványa negatív.

2. Páros rendű gyök csak pozitív valós szám esetén, páratlan rendű gyök bármilyen előjelű valós szám esetén értelmezett.

Racionális kitevőjű hatványok összehasonlítása:

1. $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$, bármely a, b valós szám és r racionális szám esetén.
2. Ha $a \in (0, 1)$, akkor $a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$, $r, s \in Q$
3. Ha $a > 1$, akkor $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$, $r, s \in Q$.

Műveletek racionális kitevőjű hatványokkal:

Ha $a > 0$ és $b > 0$, tetszőleges $n, m \in Q$ esetén fennállnak a következő egyenlőségek:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(ab)^n = a^n b^n$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a^n : b^n = (a : b)^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^0 = 1$

Gyökmennyiségek összehasonlítása: Ha $a, b > 0$, $n \in N$, $n \geq 2$ akkor $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a > b$

Műveletek gyökmennyiségekkel:

Ha $a > 0$ és $b > 0$, $n \in N$, $n \geq 2$ akkor:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
4. $\sqrt[n]{a}^{m} = \sqrt[n]{a^m}$
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, $k \in$ N*

Ha $a \in$ R, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Megoldott feladatok:

1. Határozd meg azokat az x értékeket, amelyekre az $\mathrm{E} = \sqrt{2x-3}$ jól meghatározott.
   Megoldás: Mivel a gyök kitevője 2 (nincs kiirva) tehát páros, a gyök alatti kifejezés pozitív kell legyen. Tehát a feltétel: $2x - 3 \geq 0$. Megoldjuk az egyenlőtlenséget:
   $2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Tehát az egyenlőtlenség és egyben a feladat megoldása is
   $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$
2. Számitsd ki: $2^3 - 4^{\frac{1}{2}}$
   Megoldás: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, tehát $2^3 - 4^{\frac{1}{2}} = 8 - 2 = 6$
3. Rendezd növekvő sorrenbe a következő számokat: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$.
   Megoldás: Gyököket akkor tudunk könnyen összehasonlitani, ha a gyökkitevők megegyeznek, ezért először közös gyökkitevőre hozunk $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot4]{3^4} = \sqrt[12]{81}$, $\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot6]{2^6} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$
   $\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{81} < \sqrt[12]{125}$, tehát a feladat megoldása $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$.
4. Határozd meg az $E(x) = x^2 - 4x - 1$ kifejezés értékét $x = 2 + \sqrt{5}$ -re.
   Megoldás: $E(x) = (2 + \sqrt{5})^2 - 4(2 + \sqrt{5}) - 1 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 8 - 4\sqrt{5} = 1$

Irracionális egyenletek

Egy egyenletet irracionálisnak nevezünk, ha az ismeretlen gyök alatt is megjelenik.

Például: $\sqrt{x-1} = 2$, $\sqrt{x+3} = 2x + 1$, $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$, $\sqrt[3]{x+2} = 3$ stb.

Az irracionális egyenletek megoldási algoritmusa:

1. Meghatározzuk az egyenlet megoldhatósági halmazát (azt a halmazt, amelyen az ismeretlent tartalmazó gyökök értelmezettek).
2. Ha szükséges, rendezzük az egyenletet. Akkor szükséges rendezni az egyenletet, ha az ismeretlen egyetlen gyök alatt jelenik meg. Ebben az esetben az ismeretlent tartalmazó gyököt az egyenlet egyik oldalán hagyjuk, az összes többi tagot az egyenlet másik oldalára visszük.
3. Az egyenlet mindkét oldalát ugyanarra a hatványra emeljük, hogy kiküszöböljük a gyököket.
4. Szükség esetén a 2. és 3. Lépést megismételjük.

5. Megoldjuk a kapott, már nem irracionális, egyenletet.
6. Az előző pontban kapott gyökök közül kiválasztjuk az eredeti egyenlet lehetséges gyökeit (azokat, amelyek benne vannak az irracionális egyenlet megoldhatósági halmazában).
7. A lehetséges gyököket behelyettesítjük az eredeti egyenletbe. Azok az értékek lesznek az egyenlet megoldásai, amelyekre az ellenőrzéskor igaz kijelentést kapunk.

Megoldott feladatok:

Oldd meg a következő egyenleteket:

1. $\sqrt{x-1} = 2$

-meghatározzuk a megoldhatósági halmazt x - 1 ≥ 0 ⇒ x ≥ 1, ahonnan x ∈ [1, +∞)

- az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük $(\sqrt{x-1})^2 = 2^2$

$$x - 1 = 4$$

-megoldjuk a kapott egyenletet $x = 5$ .Az 5 lehetséges megoldás, mert benne van a megoldhatósági halmazban.

- ellenőrizzük a lehetséges gyököt: $\sqrt{5-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$ vagyis a $2 = 2$ igaz kijelentéshez jutottunk.

Tehát az egyenlet megoldása $x = 5$.

2. $\sqrt{x+1} = 5 - x$

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ tehát a megoldhatósági halmaz $x \in [-1, +\infty)$

$(\sqrt{x+1})^2 = (5-x)^2$, $x + 1 = 25 - 10x + x^2$, $x^2 - 11x + 24 = 0$. Megoldjuk a kapott egyenletet $\Delta = 121 - 96 = 25$, $x_1 = 8$, $x_2 = 3$. Mindkét érték lehet megoldás. Ellenőrizzük

$\sqrt{8+1} = 5 - 8$ ahonnan a 3 = -3 hamis egyenlőséghez jutunk, tehát a 8 nem megoldása az egyenletnek.

$\sqrt{3+1} = 5 - 3$ ahonnan a 2 = 2 igaz egyenlőséghez jutunk. Tehát az adott egyenlet megoldása x = 3.

3. $\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x}$, megoldhatósági feltételek $\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Megoldjuk az egyenlőtlenség rendszert: $3x + 4 \geq 0$ ahonnan $x \geq -\frac{4}{3}$. Tehát a megoldhatósági halmaz

$x \in [-\frac{4}{3}, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$

$(\sqrt{3x+4})^2 = (2\sqrt{x})^2$

$3x + 4 = 4x$

$-x = -4 \Leftrightarrow x = 4$

A $4 \in [0, +\infty)$ tehát lehetséges gyöke az eredeti egyenletnek. Ellenőrizzük:

$\sqrt{3 \cdot 4 + 4} = 2\sqrt{4} \Leftrightarrow 4 = 4$ igaz kijelentés. Tehát az adott egyenlet megoldása x =4.

4. $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$

Mivel a gyökkitevő páratlan (3) a gyök alatt bármilyen valós szám lehet, tehát $x \in R$.

$(\sqrt[3]{x^3 + x + 1})^3 = x^3$
$x^3 + x + 1 = x^3$
$x + 1 = 0$
$x = -1$ benne van a megoldhatósági halmazban, tehát ellenőrizzük, hogy kielégiti-e az eredeti egyenletet: $\sqrt[3]{(-1)^3 + (-1) + 1} = -1 \Leftrightarrow$ -1 = -1 igaz kijelentés, tehát az adott egyenlet megoldása $x = -1$

Javasolt feladatok:

1. Helyezd növekvő sorrendbe az $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, 64 és $\sqrt[3]{8}$ számokat.

M: $\sqrt[3]{8}$, $(\frac{1}{4})^{-2}$, 64

2. Igazold, hogy $\sqrt[3]{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$ természetes szám.

M . 3∈ N

3. Számítsd ki $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

M: 0

4. Határozd meg azokat a természetes n értékeket, amelyekre az $E(n) = \sqrt{10-3n}$ kifejezés jól meghatározott.

M:n$\in \{0, 1, 2, 3\}$

5. Oldd meg R-en a $\sqrt{x-5} = 2$ egyenletet!

M: x = 9

6. Határozd meg a $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$ egyenlet valós megoldásait!

M: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$

7. Határozd meg a $\sqrt{7-x} = 1$ egyenlet valós megoldásait!

M : x = 6

8. Oldd meg a $\sqrt{x^2 - 3} = 1$ egyenletet az R halmazon!.

M: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

9. Oldd meg a $\sqrt{2x+3} = x$ egyenletet!

M: x = 3

10. Oldd meg a $\sqrt{x+1} = x - 1$ egyenletet! M: x = 3

11. Oldd meg a $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$ egyenletet! M: x = 2

12. Oldd meg a $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0$ egyenletet! M : x = 2

13. Oldd meg a $\sqrt{5-x^2}=2$ egyenletet! M: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
14. Határozd meg azon *x* valós számokat, amelyekre igaz a következő egyenlőség
$\sqrt{x^2+1}=2$.
M: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$,
15. Oldd meg a $\sqrt{x+2}=3$ egyenletet. M: x = 7
16. Határozd meg a $\sqrt{2x+3}=x+2$ egyenlet valós gyökeit. M: x = -1
17. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x-1}-2=0$ egyenletet. M: x = 5
18. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt[3]{1-x}=-2$ egyenletet. M : x=9

2. Fejezet: Exponenciális függvény és logaritmusfüggvény

Pozitív szám logaritmusának értelmezése

Egy pozitív valós szám *a* alapú logaritmusa azzal a hatványkitevővel egyenlő, amelyre az *a* számot emelve megkapjuk az adott számot.

$$a^x = A \Leftrightarrow x = log_a A, \text{ ahol } a > 0,\ a \neq 1,\ A > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

A $log_a A$ jelölésben *a* a logaritmus alapja, *A* a logaritmus argumentuma.

Példa:

$$log_2 8 = 3, \text{ mert } 2^3 = 8$$

$$log_3 \frac{1}{3} = -1, \text{ mert } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

A fenti értelmezés alapján $a^{log_a A} = A$, $log_a 1 = 0$ és $log_a a = 1$.

Jelölések: $log_{10} a = lga, log_e a = lna$

Begyakorló példák megoldással

1. Számítsd ki: $log_3 \frac{1}{27} - \sqrt[3]{8}$.

Megoldás: Pozitív valós szám logaritmusának kiszámításánál mindig arra kell gondolnunk, hogy milyen hatványra kell emelni a logaritmus alapját, hogy megkapjuk a logaritmus argumentumát. $log_3 \frac{1}{27} = -3$, mert $3^{-3} = \frac{1}{27}$. Ezek alapján:

$$log_3 \frac{1}{27} - \sqrt[3]{8} = -3 - 2 = -5$$

2. Igazold, hogy $log_2 \frac{1}{4} + \sqrt[3]{27} = 1$

Megoldás:

$$log_2 \frac{1}{4} = -2, \text{ mert } 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$\sqrt[3]{27} = 3, \text{ mert } 3^3 = 27$$
$$log_2 \frac{1}{4} + \sqrt[3]{27} = -2 + 3 = 1$$

3. Számítsd ki: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + log_4 16$.

Megoldás:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{2} = 3^2 = 9$$
$$log_4 16 = 2, \text{ mert } 4^2 = 16$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + log_4 16 = 9 + 2 = 11$$

4. Igazold, hogy $log_3 9 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - \sqrt[3]{64} = 2$

Megoldás:

$$log_3 9 = 2, \text{ mert } 3^2 = 9$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{1}\right)^{1} = 4$$

$$\sqrt[3]{64} = 4, \text{ mert } 4^3 = 64$$

$$log_3 9 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - \sqrt[3]{64} = 2 + 4 - 4 = 2$$

5. Igazold, hogy $log_5 1 - \sqrt{4} = -1$.

Megoldás:

$$log_5 1 = 0, \text{ mert } 5^0 = 1$$
$$log_5 1 + \sqrt{4} = 0 - 2 = -1$$

6. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $log_2 \frac{1}{8}, \sqrt[3]{-1}, log_8 1$

Megoldás: Kiszámítjuk mindegyik kifejezés értékét (egyszerűbb alakra hozzuk őket), majd összehasonlítjuk a kapott értékeket:

$$log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ mert } 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$
$$\sqrt[3]{-1} = -1, \text{ mert } (-1)^3 = -1$$
$$log_8 1 = 0, \text{ mert } 8^0 = 1$$
$$-3 < -1 < 0 \Rightarrow log_2 \frac{1}{8} < \sqrt[3]{-1} < log_8 1$$

7. Rendezd csökkenő sorrendbe a $log_{\frac{1}{3}} 9, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \sqrt[3]{27}$ számokat.

Megoldás: Az előző feladat mintájára, kiszámoljuk az adott értékeket, majd a kapott eredményeket hasonlítjuk össze:

$$log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \text{ mert } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 2^2 = 4$$
$$\sqrt[3]{27} = 3, \text{ mert } 3^3 = 27$$
$$4 > 3 > -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} > \sqrt[3]{27} > log_{\frac{1}{3}} 9$$

8. Igazold, hogy $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{log_3 27}$ természetes szám.

Megoldás: Alkalmazzuk a valós hatványkitevőkre vonatkozó tulajdonságot:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{log_3 27} = \sqrt[3]{3^{log_3 27}} = \sqrt[3]{27} = 3 \in \mathbb{N}$$

9. Igazold, hogy $log_3\left(3^{-1} \cdot \sqrt{9}\right)$ természetes szám.

Megoldás: Egyszerűbb alakra hozzuk a logaritmus alatt levő számot:

$$log_3\left(3^{-1} \cdot \sqrt{9}\right) = log_3 \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) = log_3 \frac{3}{3} = log_3 1 = 0 \in \mathbb{N}$$

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Számítsd ki: $log_4 16 - log_6 36$.

Eredmény: 0.

2. Számítsd ki: $log_3 \frac{1}{9} - \sqrt[3]{8}$.

Eredmény: -4.

3. Számítsd ki: $log_4 \frac{1}{16} - \sqrt[3]{-8}$.

Eredmény: 0.

4. Számítsd ki: $log_5 25 + log_2 \frac{1}{4} - log_2 \frac{1}{8}$.

Eredmény: 3.

5. Számítsd ki: $log_3 9 - \sqrt[3]{27} + log_6 1$.

Eredmény: -1.

6. Számítsd ki: $lg100 + log_2 8 - log_2 \frac{1}{16}$.

Eredmény: 1.

7. Számítsd ki: $log_7 1 + log_7 49 + log_5 \frac{1}{25}$.

Eredmény: 0.

8. Igazold, hogy $\sqrt[3]{27} - log_3 \frac{1}{27} = 6$.

9. Igazold, hogy $log_2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} + \sqrt[3]{-1} = 6$.

10. Igazold, hogy $lg1 + lg \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 8$.

11. Rendezd növekvő sorrendbe a $log_5 1, log_6 \frac{1}{6}$ és $log_8 8$ számokat.

Eredmény: $log_6 \frac{1}{6} < log_5 1 < log_8 8$.

12. Rendezd csökkenő sorrendbe a $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $log_3 \frac{1}{3}$ és $lg1$ számokat.

Eredmény: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} > lg1 > log_3 \frac{1}{3}$.

13. Igazold, hogy $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{log_2 8}$ természetes szám.

14. Igazold, hogy $\left(\sqrt{7}\right)^{log_7 49}$ természetes szám.

15. Igazold, hogy $log_5\left(\sqrt{25} \cdot 5^{-1}\right)$ természetes szám.

A logaritmus tulajdonságai

Ha *A* és *B* két pozitív valós szám , *m* egy tetszőleges valós szám, $n \geq 2$ természetes szám, akkor érvényesek a következő tulajdonságok ($\boldsymbol{a} > 0,\ \boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$):

1. $\boldsymbol{log_a(A \cdot B) = log_a A + log_a B}$ **- szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusok összegével**
2. $\boldsymbol{log_a \frac{A}{B} = log_a A - log_a B}$ **- hányados logaritmusa egyenlő a számláló és a nevező logaritmusainak különbségével**
3. $\boldsymbol{log_a A^m = m log_a A}$ **- hatvány logaritmusa egyenlő a hatványkitevő és az alap logaritmusának szorzatával**
4. $\boldsymbol{log_a \sqrt[n]{A} = \frac{log_a A}{n}}$ **- gyök logaritmusa egyenlő a szám logaritmusának és a gyökkitevőnek a hányadosával**
5. **A logaritmus alapjának kicserélése: Ha *a* és *b* két 1-től különböző pozitív valós szám, *A* pedig egy tetszőleges pozitív szám akkor:** $\boldsymbol{log_a A = log_b A \cdot log_a b}$

Begyakorló példák megoldással

1. Számítsd ki: $log_7 28 - log_7 4$

Megoldás:
A második tulajdonság alapján: $log_7 28 - log_7 4 = log_7 \frac{28}{4} = log_7 7 = 1$

2. Számítsd ki: $log_8 32 + log_8 2$.

Megoldás:
Az első tulajdonság felhasználásával: $log_8 32 + log_8 2 = log_8(32 \cdot 2) = log_8 64 = 2$

3. Igazold, hogy $log_3 5 + log_3 18 - log_3 10 = 2$

Megoldás: Az első és a második tulajdonság együttes felhasználásával:

$$log_3 5 + log_3 18 - log_3 10 = log_3 \frac{5 \cdot 18}{10} = log_3 \frac{90}{10} = log_3 9 = 2$$

4. Számítsd ki: $3 \cdot log_2 3 - log_2 9$.

Megoldás: A harmadik tulajdonság alapján a logaritmus előtti szorzótényezőt bevisszük a hatványkitevőbe, majd alkalmazzuk a második tulajdonságot:

$$3 \cdot log_2 3 - log_2 9 = log_2 3^3 - log_2 9 = log_2 27 - log_2 9 = log_2 \frac{27}{9} = log_2 3$$

5. Számítsd ki: $log_5 7 + log_5 \frac{5}{7} + log_5 \sqrt[3]{25}$.

Megoldás: Az első tulajdonság alapján összevonjuk a kifejezés első két tagját, a harmadikra alkalmazzuk a negyedik tulajdonságot, majd elvégezzük a műveleteket:

$$log_5 7 + log_5 \frac{5}{7} + log_5 \sqrt[3]{25} = log_5 \left(7 \cdot \frac{5}{7}\right) + \frac{log_5 25}{3} = log_5 5 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

6. Igazold, hogy $\frac{log_3 36 - log_3 9}{log_3 2} = 2$.

Megoldás: Először elvégezzük a számlálóban levő kivonást a második tulajdonság alapján, alkalmazzuk a harmadik tulajdonságot, majd egyszerűsítünk:

$$\frac{log_3 36 - log_3 9}{log_3 2} = \frac{log_3 \frac{36}{9}}{log_3 2} = \frac{log_3 4}{log_3 2} = \frac{log_3 2^2}{log_3 2} = \frac{2 \cdot log_3 2}{log_3 2} = 2$$

7. Számítsd ki: $lg6 + lg5 - lg30$

Megoldás: $lg6 + lg5 - lg30 = lg \frac{6 \cdot 5}{30} = lg \frac{30}{30} = lg1 = 0$

8. Igazold, hogy $lg \frac{2}{1} + lg \frac{3}{2} + lg \frac{4}{3} + \cdots + lg \frac{10}{9} = 1$

Megoldás: Az első tulajdonság felhasználásával észre kell venni, hogy a szorzótényezőkben megjelenő számlálók és nevezők páronként egyszerűsödnek (az egyik tört számlálója a másik tört nevezője, ezek összeszorozva egyszerűsödnek). Nem marad meg csak a legelső tört nevezője és az utolsó számlálója:

$$lg \frac{2}{1} + lg \frac{3}{2} + lg \frac{4}{3} + \cdots + lg \frac{10}{9} = lg \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{9}\right) = lg \frac{10}{1} = lg10 = 1$$

9. Igazold, hogy $log_3 4 \cdot log_4 9 = 2$

Megoldás:
Az ötödik képlet alapján

$$log_3 4 \cdot log_4 9 = log_3 9 = 2$$

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Számítsd ki: $log_5 10 + log_5 2 - log_5 4$.

Eredmény: 1.

2. Számítsd ki: $log_3 63 - log_3 7 + log_3 1$

Eredmény: 2.

3. Igazold, hogy $2 \cdot log_8 4 - log_8 2 = 1$.

4. Igazold, hogy $3 \cdot log_2 \frac{2}{3} + log_2 \frac{27}{8} = 0$.

5. Igazold, hogy $\frac{log_6 98 - log_6 2}{log_6 7} = 2$.

6. Igazold, hogy: $\frac{log_3 32 - log_3 4}{log_3 2} = 3$.

7. Számítsd ki: $log_3 2 - \frac{log_3 4}{2}$.

Eredmény: 0.

8. Igazold, hogy $lg5 + lg6 - lg3 = 1$.

9. Számítsd ki: $log_2\frac{2}{1} + log_2\frac{3}{2} + \cdots + log_2\frac{8}{7}$.

Eredmény: 3.

10. Igazold, hogy $log_9\frac{1}{2} + log_9\frac{2}{3} + \cdots + log_9\frac{8}{9} = -1$

11. Számítsd ki: $log_2 25 \cdot log_5 2$

Eredmény: 2

12. Számítsd ki: $log_5 49 \cdot log_7 5$

Eredmény: 2

Az exponenciális függvény és a logaritmus függvény.

Az $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to (\mathbf{0}, \infty), \boldsymbol{f(x) = a^x}$ függvényt, ahol $\boldsymbol{a} > 0, \boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$, (*a* alapú) exponenciális függvénynek nevezzük.

Az $\boldsymbol{f}: (\mathbf{0}, \infty) \to \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = log_a x}, \boldsymbol{a} > 0, a \neq 1$ függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Egy függvény behelyettesítési értékét *c*-ben úgy kapjuk meg, hogy *x* helyébe *c* értékét írjuk.

Begyakorló példák megoldással

1. Adott az $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = log_3 x$ függvény. Számítsd ki $f(1) + f(9) - f(3)$.

Megoldás:

Mindhárom pontban ki kell számolni a függvény behelyettesítési értékét, majd ezekkel elvégezni a megadott műveleteket:

$$f(1) + f(9) - f(3) = log_3 1 + log_3 9 - log_3 3 = 0 + 2 - 1 = 1$$

2. Adott az $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 3^x + log_2 x$ függvény. Számítsd ki $f(1) + f(2)$.

Megoldás:

Felírjuk mindkét pontban a függvény behelyettesítési értékét, elvégezzük a műveleteket:

$$f(1) + f(2) = 3^1 + log_2 1 + 3^2 + log_2 2 = 3 + 0 + 9 + 1 = 13$$

3. Adott az $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = log_2 x$ függvény. Számítsd ki $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)$.

Megoldás:

x helyébe behelyettesítjük a megadott számokat, majd használjuk a logaritmusokra vonatkozó tulajdonságokat:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = log_2\frac{1}{2} + log_2\frac{2}{3} + log_2\frac{3}{4} = log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) = log_2\frac{1}{4} = -2$$

4. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény. Számítsd ki $f(0) + f(1) + f(2)$

Megoldás:

Behelyettesítjük a megadott értékeket, közös nevezőre hozzuk a kapott törteket, majd elvégezzük a műveleteket:

$$f(0) + f(1) + f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}$$

5. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3^{-x}$ függvény. Igazold, hogy $f(-1) + f(0) + 3f(1) = 5$

Megoldás:

Behelyettesítünk, elvégezzük a műveleteket:

$$f(-1) + f(0) + 3f(1) = 3^{-(-1)} + 3^0 + 3 \cdot 3^{-1} = 3^1 + 3^0 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 + 1 + 1 = 5$$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény. Számítsd ki: $f(-1) + f(0)$.

Eredmény: 4

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény. Igazold, hogy $f(-1)+f(0)+f(1)=\frac{7}{2}$.
3. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=log_4x$ függvény. Számítsd ki: $f(1)+f(4)+f(16)$.
Eredmény: 3.

4. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=log_3x+log_9x$ függvény. Számítsd ki: $f(1)+f(9)$
Eredmény: 3.

5. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{-x}$ függvény. Számítsd ki $f(-1)+f(0)+2\cdot f(1)$
Eredmény: 4

6. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4^{-x}$ függvény. Számítsd ki $f(-1)+f(0)+8\cdot f(1)$
Eredmény: 7.

7. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+log_4x$ függvény. Számítsd ki $f(1)+f(4)$
Eredmény: 19.

8. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x+log_3x$ függvény. Számítsd ki $f(1)+f(3)$
Eredmény: 31.

9. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=log_5x$ függvény. Számítsd ki $f\left(\frac{1}{25}\right)+f(1)+f(25)$
Eredmény: 0.

10. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=log_4x$ függvény. Számítsd ki $f\left(\frac{1}{16}\right)+f(1)+f(16)$
Eredmény: 0.

Exponenciális egyenletek

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlent tartalmazó kifejezés a hatványkitevőben szerepel, exponenciális egyenleteknek nevezzük.

Az $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ alakú egyenlet ($a>0, a\neq 1$)

Mivel ebben az egyenletben az alapok egyenlők, az egyenlőség akkor áll fenn, ha a hatványkitevők is egyenlők egymással, vagyis $f(x)=g(x)$.

Begyakorló példák megoldással

Oldjuk meg a következő exponenciális egyenleteket:

1. $3^{x-2}=3^{2x+5}$

Megoldás: Egyenlővé kell tennünk a hatványkitevőket: $x-2=2x+5$.

Megoldjuk az így kapott elsőfokú egyenletet: $x-2x=2+5 \Leftrightarrow -x=7 \Leftrightarrow x=-7$

2. $2^{3x-1}=2^2$

Megoldás: A hatványkitevők egyenlővé tételével: $3x-1=2 \Leftrightarrow 3x=1+2 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{x-3}$

Megoldás: Első ránézésre ez az egyenlet nem tartozik ebbe az egyenlettípusba, de észre kell vennünk, hogy ilyen alakra hozható, mivel $\frac{1}{3}=3^{-1}$. Ez alapján a megadott egyenlet a következő alakba írható:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{x-3} \Leftrightarrow (3^{-1})^x=3^{x-3} \Leftrightarrow 3^{-x}=3^{x-3} \Leftrightarrow -x=x-3 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

4. $9^{x+2}=3^{x+5}$

Megoldás: Ennél az egyenletnél is észre kell venni, hogy a 9 felírható a 3 hatványának segítségével. Így $9^{x+2} = 3^{x+5} \Leftrightarrow (3^2)^{x+2} = 3^{x+5} \Leftrightarrow 3^{2x+4} = 3^{x+5} \Leftrightarrow 2x + 4 = x + 5 \Leftrightarrow x = 1$

5. $\frac{1}{5^x} = 25$

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát úgy kell alakítanunk, hogy az 5 hatványai jelenjenek meg:

$$\frac{1}{5^x} = 25 \Leftrightarrow (5^x)^{-1} = 5^2 \Leftrightarrow 5^{-x} = 5^2 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$$

Javasolt példák eredménnyel:

Oldd meg a következő egyenleteket:

1. $4^{2x+2} = 4^{x-1}$	Eredmény: $x = -3$
2. $(\sqrt{3})^{x+3} = (\sqrt{3})^{2x+1}$	Eredmény: $x = 2$
3. $3^{6x+7} = 3^{-5}$	Eredmény: $x = -2$
4. $2^{2x-3} = 2^7$	Eredmény: $x = 5$
5. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{x+2}$	Eredmény: $x = -1$
6. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} = 7^x$	Eredmény: $x = 0$
7. $2^{x+2} = 4^x$	Eredmény: $x = 2$
8. $25^{x+2} = 5^{x-3}$	Eredmény: $x = -7$
9. $\frac{1}{7^x} = 49$	Eredmény: $x = -2$
10. $\frac{1}{9^x} = 81$	Eredmény: $x = -2$

Az $\boldsymbol{a^{f(x)}} = \boldsymbol{b}$ alakú egyenlet ($\boldsymbol{a} > 0, a \neq 1, b > 0$)

A gyakorlati alkalmazások során ezekben az egyenletekben a *b* felírható az *a* hatványaként.

Begyakorló példák megoldással

Oldjuk meg a következő exponenciális egyenleteket:

1. $4^{x-2} = 16$

Megoldás: Észrevesszük, hogy 16 a 4 második hatványa. Ezek után, egy olyan egyenletet kapunk, melyben a hatványok alapjai egyenlők, vagyis a hatványkitevőket kell egyenlővé tennünk egymással, és megoldanunk az így kapott egyenletet:

$$4^{x-2} = 16 \Leftrightarrow 4^{x-2} = 4^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

2. $6^{3x-2} = 36$

Megoldás: Ugyanúgy járunk el, mint az előző feladatnál (a 36-ot felírjuk a 6 hatványaként):

$$6^{3x-2} = 36 \Leftrightarrow 6^{3x-2} = 6^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

3. $5^{x-1} = \frac{1}{25}$

Megoldás: Először az $\frac{1}{25}$-öt kell felírjuk 5 valamilyen hatványaként:

$$\frac{1}{25} = 25^{-1} = (5^2)^{-1} = 5^{-2}$$

Az egyenlet emiatt a következőképpen írható:

$$5^{x-1} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{x-1} = 5^{-2} \Leftrightarrow x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

4. $2^{x+3} = \frac{1}{8}$

Megoldás: $\frac{1}{8} = 8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$

$$2^{x+3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^{-3} \Leftrightarrow x + 3 = -3 \Leftrightarrow x = -6$$

5. $3^{x^2-x-2} = 81$

Megoldás: A 81-et 3 hatványává alakítva egyenlővé tesszük a hatványkitevőket, majd megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet:

$$3^{x^2-x-2} = 81 \Leftrightarrow 3^{x^2-x-2} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$$

Javasolt példák eredménnyel.

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1. $5^{2x+1} = 25$	Eredmény: $x = \frac{1}{2}$.
2. $3^{x-3} = 27$	Eredmény: $x = 6$
3. $7^{x-3} = 49$	Eredmény: $x = 5$
4. $3^{2x} = 81$	Eredmény: $x = 2$
5. $4^{x-2} = \frac{1}{16}$	Eredmény: $x = 0$
6. $6^{3x+1} = \frac{1}{36}$	Eredmény: $x = -\frac{1}{3}$
7. $2^{x-3} = \frac{1}{4}$	Eredmény: $x = 1$.
8. $3^{2x+2} = \frac{1}{9}$	Eredmény: $x = -2$
9. $2^{x^2-5x+7} = 2$	Eredmény: $x_1 = 3, x_2 = 2$
10. $3^{x^2-6} = 27$	Eredmény: $x_1 = -3, x_2 = 3$
11.	

Logaritmikus egyenletek

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlent tartalmazó kifejezés a logaritmus argumentumában vagy alapjában szerepel, logaritmikus egyenleteknek nevezzük.

A $log_a f(x) = b$ alakú egyenlet ($a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$)

A logaritmikus egyenletek megoldásának sikere abban is rejlik, hogy helyesen fel tudjuk írni a létezési feltételeket. Nem szabad elfelejtenünk, hogy a logaritmus argumentuma csak pozitív szám lehet, vagyis első lépésben mindig ki kell kötnünk az $f(x) > 0$ feltételt, majd ezt az egyenlőtlenséget megoldva meghatároznunk *x* lehetséges értékeit. Ezek után használva a logaritmus értelmezését, felírhatjuk, hogy $f(x) = a^b$. Megoldva az egyenletet, meg kell állapítanunk, hogy a kapott érték eleget tesz-e az előzőleg megszabott feltételnek.

Begyakorló példák megoldással

1. Oldjuk meg a $log_3(5x + 1) = 1$ egyenletet.

Megoldás:

A létezési feltétel: $5x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$

A logaritmus értelmezését használva: $log_3(5x + 1) = 1 \Leftrightarrow 5x + 1 = 3^1 \Leftrightarrow 5x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

A kapott *x* érték eleget tesz a létezési feltételnek: $\frac{2}{5} > -\frac{1}{5}$. Az egyenlet megoldása tehát $x = \frac{2}{5}$

2. Oldd meg a $log_4(x - 5) = 0$ egyenletet.
Megoldás:

A létezési feltétel: $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Ezek után a logaritmus értelmezését felhasználva:

$log_4(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 4^0 \Leftrightarrow x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 6 > 5$, vagyis a kapott érték eleget tesz a létezési feltételnek.

3. Oldd meg a $log_2(x + 3) = 3$ egyenletet.
Megoldás:

Létezési feltétel: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

Használva a logaritmus értelmezését:

$log_2(x + 3) = 3 \Leftrightarrow x + 3 = 2^3 \Leftrightarrow x + 3 = 8 \Leftrightarrow x = 5 > -3$, vagyis eleget tesz a létezési feltételnek is.

4. Oldd meg a $log_5(x - 10) = 2$ egyenletet.
Megoldás:

Létezési feltétel: $x - 10 > 0 \Leftrightarrow x > 10$

$log_5(x - 10) = 2 \Leftrightarrow x - 10 = 5^2 \Leftrightarrow x - 10 = 25 \Leftrightarrow x = 35 > 10$. Mivel az $x = 35$ eleget tesz a létezési feltételnek, ezért az egyenlet megoldása.

5. Oldd meg a $lg(4 - 2x) = 2$ egyenletet.
Megoldás:

Létezési feltétel: $4 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$.

$lg(4 - 2x) = 2 \Leftrightarrow 4 - 2x = 10^2 \Leftrightarrow 4 - 2x = 100 \Leftrightarrow -2x = 96 \Leftrightarrow x = -48 < 2$, vagyis az $x = -48$ az egyenlet megoldása.

Javasolt példák eredménnyel.
Oldd meg a következő egyenleteket:

1. $log_2(3x + 1) = 4$	Eredmény: $x = 5$
2. $log_3(3x - 1) = 0$	Eredmény: $x = \frac{2}{3}$
3. $log_4(x - 4) = 1$	Eredmény: $x = 8$
4. $log_5(2x - 3) = 2$	Eredmény: $x = 14$
5. $log_6(2x + 1) = 1$	Eredmény: $x = \frac{5}{2}$
6. $log_7(x + 8) = 2$	Eredmény: $x = 41$
7. $log_8(2x - 1) = 0$	Eredmény: $x = 1$
8. $lg(2 - x) = 1$	Eredmény: $x = -8$
9. $log_3(2x - 5) = 3$	Eredmény: $x = 16$
10. $lg(x + 1) = 0$	Eredmény: $x = 0$

3. Fejezet: Komplex számok

Komplex számok algebrai alakja, a komplex szám konjugáltja, műveletek komplex számokkal

Egy komplex szám algebrai alakja a következő: $z = a + ib, \quad ahol\ a,b \in \mathbb{R}\ és\ i = \sqrt{-1}$.

Az a valós számot a z komplex szám valós részének nevezzük, jelölése: $\operatorname{Re}(z)$.

A b valós számot a z komplex szám képzetes (imaginárius) részének nevezzük, jelölése: $\operatorname{Im}(z)$.

Egy $z = a + ib$ komplex szám konjugáltja a következő: $\bar{z} = a - ib$.

Két $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$ komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Két $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$ komplex szám összege $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Két $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$ komplex szám különbsége $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$.

Két $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$ komplex szám szorzata $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

Egy komplex szám konjugálttal való szorzása $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Egy komplex szám hatványozása többszörös szorzással történik.

Az i hatványai: $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ \ldots$ látható, hogy ismétlődnek, a hatvány 4-el való osztási maradékától függ. Például, ha ki akarjuk számítani i^{2015} értékét, először elosztjuk a 2015 számot 4-el, ennek a maradéka 3, tehát $i^{2015} = i^3 = -i$.

Begyakorló példák megoldással

1. Számítsd ki $(1-i)(1+2i) - 3(2-i)$.

Megoldás:

Először a szorzásokat végezzük el, majd a valós részt a valós résszel, a képzetest a képzetes résszel adjuk össze: $(1-i)(1+2i) - 3(2-i) = 1 + 2i - i + 2 - 6 + 6i = -3 + 7i$.

2. Számítsd ki $(1+i)(1-i) + 2(2+i)$

Megoldás: A fenti szabályokat figyelembe véve:

$$(1+i)(1-i) + 2(2+i) = 1 - i + i + 1 + 4 + 2i = 6 + 2i$$

3. Számítsd ki $(1-i)^{10}$.

Megoldás:

Először a komplex szám négyzetét számítjuk ki: $(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = 1 - i - i - 1 = -2i$.

Tehát $(1-i)^{10} = \left[(1-i)^2\right]^{10} = (-2i)^{10} = (-2)^{10} \cdot i^{10} = 1024 \cdot i^2 = -1024$.

4. Határozd meg a $z=3+2\;\;1-i$ komplex szám valós részét.

Megoldás:

Elvégezve a műveleteket $z=3+2\;\;1-i\;\;=3+2-2i=5-2i$, tehát a komplex szám valós része 5, képzetes része -2. Másképp leírva: $\mathrm{Re}(z)=5,\;\;\mathrm{Im}(z)=-2$.

5. Határozd meg a $z=\dfrac{2+i}{3i+5}$ komplex szám valós részét

Megoldás:

Az ilyen típusú komplex számoknál, amikor i van a nevezőben, először bővítünk a nevezőben szereplő komplex szám konjugáltjával:

$$z=\frac{2+i}{3i+5}=\frac{2+i\;\;\;3i-5}{3i+5\;\;\;3i-5}=\frac{6i-10-3-5i}{9+25}=\frac{-13+i}{34}=-\frac{13}{34}+i\frac{1}{34}$$. Tehát

$$\mathrm{Re}\;\;z\;\;=-\frac{13}{34},\;\;\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{34}.$$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Számítsd ki $1-i\;\;1+2i\;\;-3\;\;2-i$. Eredmény: $9-6i$.

2. Számítsd ki $7\;\;2+3i\;\;-7\;\;2-3i$. Eredmény: $42i$.

3. Számítsd ki $1-i\;\;^{2}+\;\;1+2i\;\;^{4}$. Eredmény: $-7-14i$.

4. Számítsd ki $1+i\;\;^{2014}$. Eredmény: $2^{1007}\cdot(-i)$.

5. Számítsd ki $2+2i\;\;^{4}$. Eredmény: -32 .

6. Határozd meg a $z=7-2\;\;1-i$ komplex szám valós részét. Eredmény: $\mathrm{Re}(z)=5$.

7. Határozd meg a $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ komplex szám képzetes részét. Eredmény: $\mathrm{Im}(z)=1$.

8. Határozd meg a $z=\dfrac{3+7i}{4-5i}$ komplex szám képzetes részét. Eredmény: $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{43}{41}$.

9. Határozd meg a $z=\dfrac{2+i}{1-2i}$ komplex szám valós részét. Eredmény: $\mathrm{Re}(z)=0$.

10. Határozd meg a $z=\dfrac{27+18i}{9-45i}$ komplex szám valós részét. Eredmény: $\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{26}$.

Másodfokú egyenletek megoldása a komplex számok halmazában

Legyen $ax^2+bx+c=0, \quad ahol\ a,b,c\in\mathbb{R}$ egy másodfokú egyenlet, a megoldása a diszkrimináns kiszámításával kezdődik $\Delta=b^2-4ac$, majd alkalmazzuk a megoldó képletet: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ha a diszkrimináns negatív, akkor komplex gyökei vannak az egyenletnek.

Begyakorló példák megoldással

1. Oldd meg az $x^2-2x+5=0$ egyenletet.

Megoldás:

Először a diszkriminánst számoljuk ki: $\Delta=4-20=-16=16\cdot(-1)=4^2\cdot i^2=(4i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=4i$,

innen $x_{1,2}=\dfrac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$.

2. Oldd meg az $4x^2-12x+13=0$ egyenletet.

Megoldás:

Először a diszkriminánst számoljuk ki: $\Delta=144-208=-64=64\cdot(-1)=8^2\cdot i^2=(8i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=8i$,

innen $x_{1,2}=\dfrac{-12\pm8i}{8}=-\dfrac{3}{4}\pm i$.

3. Oldd meg az $x^2-4x+5=0$ egyenletet.

Megoldás:

Először a diszkriminánst számoljuk ki: $\Delta=16-20=-4=4\cdot(-1)=2^2\cdot i^2=(2i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2i$,

innen $x_{1,2}=\dfrac{4\pm2i}{2}=2\pm i$.

4. Oldd meg az $4x^2-4x+5=0$ egyenletet.

Megoldás:

Először a diszkriminánst számoljuk ki: $\Delta=16-80=-64=64\cdot(-1)=8^2\cdot i^2=(8i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=8i$,

innen $x_{1,2}=\dfrac{4\pm8i}{8}=\dfrac{1}{2}\pm i$.

5. Oldd meg az $x^2-16x+113=0$ egyenletet.

Megoldás:

Először a diszkriminánst számoljuk ki:

$\Delta=256-452=-196=196\cdot(-1)=14^2\cdot i^2=(14i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=14i$, innen

$x_{1,2}=\dfrac{16\pm14i}{2}=8\pm7i$.

Javasolt példák eredménnyel.

1. Oldd meg az $x^2-6x+10=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=3+i,\ x_2=3-i$.
2. Oldd meg az $x^2-2x+5=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=1+2i,\ x_2=1-2i$.
3. Oldd meg az $x^2-8x+17=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=4+i,\ x_2=4-i$.
4. Oldd meg az $x^2+1=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=i,\ x_2=-i$.
5. Oldd meg az $x^2-2x+10=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=1+3i,\ x_2=1-3i$.
6. Oldd meg az $2x^2-2x+5=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=\frac{1}{2}+i\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{2}-i\frac{3}{2}$.
7. Oldd meg az $144x^2-72x+27=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=\frac{1}{4}+i\frac{1}{3},\ x_2=\frac{1}{4}-i\frac{1}{3}$.
8. Oldd meg az $144x^2-96x+27=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=\frac{1}{3}+i\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{3}-i\frac{1}{4}$.
9. Oldd meg az $-2x^2-2x-1=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$
10. Oldd meg az $x^2+x+1=0$ egyenletet. Eredmény: $x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Fejezet: Kombinatorika

Permutáció

Értelmezés: *Adott számú elem valamely sorrendjét (elrendezését) az adott elemek egy permutációjának nevezzük.* (Permutáció: elrendezés.)

A feladatot általánosan megfogalmazva: Adott ***n*** db különböző tárgy. Hányféleképpen rakható sorba, azaz mennyi a permutációinak a száma?

Próbáljuk meg egy modellel szemléltetni!

Képzeljünk el egy n rekeszes dobozt.

1. hely	2. hely	3. hely	....	(n-1). hely	n. hely
n lehetőség	(n-1) lehetőség	(n-2) lehetőség	....	2 lehetőség	1 lehetőség

Az első helyre az ***n*** elem bármelyike választható, tehát erre a helyre ***n*** lehetőségünk van. A második helyre már csak ***(n-1)*** elem közül választhatunk, mert az első rekeszbe már egy tárgyat elhelyeztünk. Így tehát a 2. helyre ***(n-1)*** lehetőségünk van. És így tovább. Az utolsó előtti rekesznél már csak két tárgyunk van, így ebbe a rekeszbe 2 lehetőség közül választhatunk. Az utolsó rekeszbe már csak 1 lehetőségünk marad.

Tétel: *$\boldsymbol{n}$ különböző elem összes permutációjának a száma: $P_n=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1$.*

P_n értékét tehát megkapjuk, ha ***1***-től ***n***-ig összeszorozzuk az egész számokat.

*Az első n pozitív egész szám szorzatát **n faktoriális**nak nevezzük, jelölése **n!***

$$P_n= n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n$$

Példák:

$2!=1\cdot 2=2$.
$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$. Vagyis 3 különböző tárgyat 6 féleképpen lehet sorba rakni.

$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$. Vagyis 4 különböző tárgyat 24 féleképpen lehet sorba rakni.

$10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=3\,628\,800$. Tehát 10 különböző tárgynak ilyen sok elrendezése lehetséges.

Az értelmezésből következik, hogy ***n!=(n-1)!n***.

$9! =1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9=\mathbf{8!\cdot 9} = \mathbf{7!\, 8\cdot 9}$

Megállapodás szerint 1!=1, illetve 0!=1.

Megoldott feladatok:

1. Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé 5 ember?
Megoldás: 5 ember elrendezését, azaz permutációját számoljuk ki: $P_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

2. Hány különböző számjegyekből álló háromjegyű szám képezhető a $2,4,6$ számjegyekkel?
Megoldás: $\mathbf{P_3} = 3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$, vagy felírjuk a számokat: 246, 264, 426, 462, 264, 246

3. Számítsátok ki a következő kifejezések értékét: $6!-4!$, $\frac{5!+6!}{7!-5!}$
Megoldás: Két féle képpen oldhatjuk meg.

1. Kiszámolhatjuk külön-külön a permutációkat, majd kivonjuk egymásból. $6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$,
$4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$, $6!-4! = 720-24 = 696$

$$\frac{5!+6!}{7!-5!} = \frac{120+720}{5040-120} = \frac{840}{4920} = \frac{84}{492} = \frac{21}{123} = \frac{7}{41}$$

2. A nagyobb számot felírjuk a másik segítségével: $6! = 4!\cdot5\cdot6$, vagyis
$$6!-4! = 4!\cdot5\cdot6-4! = 4!(5\cdot6-1) = 4!\cdot(30-1) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot29 = 696$$

$$\frac{5!+6!}{7!-5!} = \frac{5!+5!\cdot6}{5!\cdot6\cdot7-5!} = \frac{5!(1+6)}{5!\cdot(6\cdot7-1)} = \frac{5!\cdot7}{5!\cdot41} = \frac{7}{41}$$

4. Igazoljátok, hogy $\frac{7!}{3!\cdot4!}-\frac{9!}{4!\cdot6!}$ természetes szám.

Megoldás: $\frac{7!}{3!\cdot4!}-\frac{9!}{4!\cdot6!} = \frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4!}-\frac{6!\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}-\frac{7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\cdot7-7\cdot3 = 35-21 = 14\in\mathbb{N}$

5. Határozd meg az n természetes számot, ha $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6.$

Megoldás: Értelmezés szerint felírjuk a faktoriálisakat: kikötjük, hogy n természetes szám és $n\geq5$,
$$\frac{(n-5)!\cdot(n-4)\cdot(n-3)}{(n-5)!} = 6 \Leftrightarrow (n-4)\cdot(n-3) = 6$$

Mivel (n-4)(n-3) két egymásután következő természetes szám és 6 felírható mint 2·3, következik, hogy n-4 = 2 és n-3 = 3, vagyis n = 6

Az (n-4)(n-3) = 6 egyenlet megoldható úgy is, hogy elvégezzük a szorzást és megoldjuk, mint egy
$$(n-4)\cdot(n-3) = 6 \Leftrightarrow n^2-3n-4n+12 = 6 \Leftrightarrow n^2-7n+12 = 6 \Leftrightarrow n^2-7n+6 = 0$$
másodfokú egyenletet.

$$\Delta = b^2-4ac,\ \Delta = (-7)^2-4\cdot1\cdot6,\ \Delta = 49-24,\ \Delta = 25,\ n_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7\pm5}{2}$$

$n_1 = 6$ és $n_2 = 1$

Csak az n = 6 teljesíti a feltételt.

Variáció

Értelmezés:

*Ha egy **n** elemes halmaz elemeiből úgy képezünk **k** elemes halmazokat (k□n), hogy azok sorrendje is fontos, és minden elemet csak egyszer választunk ki, akkor ezt az eljárást **variálás**nak mondjuk. Az így kapott halmazokat (egy adott kiválasztás adott elrendezését) **variáció**nak nevezzük.*

*Az összes lehetőségek számát, V_n^k-val jelöljük (**n** elem **k**-ad rendű variációja).*

A variációnál tehát ***kiválasztás és sorrend*** is szerepel.

<u>**Tétel:**</u> ***n*** különböző elem ***k***-ad rendű variációinak száma: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, (k□n, $k,n \in \mathbb{N}$).

Megoldott feladatok:

1. A 100 m-es gyorsúszás döntőjében 8-an indulnak. Hányféleképpen lehet az érmeket kiosztani, ha tudjuk, hogy az első három helyezett kap érmet?

Az ilyen típusú feladatoknál természetesen nem mindegy, hogy kik, és milyen sorrendben állnak a dobogón, kapják az érmeket.

Kiválasztás: kik állnak a dobogón, ***sorrend:*** milyen sorrendben értek célba.

Készítünk most is egy modellt!

I. helyezett.	II. helyezett.	III. helyezett.
8 lehetőség.	7 lehetőség.	6 lehetőség.

Vagyis $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Ha már látjuk, hogy ez kiválasztást és rendezést is jelent, akkor ez variáció 8-ból 3-val.

$$V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

2. Egy 35-ös létszámú osztályban 7 különböző könyvet sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet a könyvek szétosztása, ha egy tanuló csak egy könyvet kaphat?

Megoldás: Mivel csak hét tanuló kap könyvet és nem mindegy, hogy ki melyiket kapja, mert különböző könyvek vannak, variációval számolhatjuk ki:

$$V_{35}^7 = \frac{35!}{(35-7)!} = \frac{35!}{28!} = \frac{28! \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{28!} = 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 .$$

Ez a szám elég nagy, nem fontos kiszámítani.

Kombináció

Értelmezés: Az ***n*** elemes halmaz ***k*** elemet tartalmazó részhalmazait az ***n*** elem ***k***-ad osztályú (rendű) kombinációinak nevezzük.

Az **n** elem **k-**ad rendű kombinációinak a számát C_n^k-val jelöljük. (***n*⍰*k*,** $k, n \in \mathbb{N}$)

Az *n* különböző elem ***k***-ad rendű kombinációinak a száma: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Az **n** elem **k-**ad rendű kombinációinak a száma megadja egy n elemes halmaz k elemes részhalmazainak a számát.

Megoldott feladatok:

1. Hányféleképpen lehet 8 tanuló közül 3-at kiválasztani olyan esetekben, amikor a sorrend közömbös?

Megoldás:

Itt csak a kiválasztás a feladat, az elrendezés nem. Ezért kombinációt használunk.

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 8 = 56$$

2. Számítsd ki $C_8^3 - C_8^5$.

Megoldás:

Felírjuk mindkét kombinációt az értelmezés szerint:

$$C_8^3 - C_8^5 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} - \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} - \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 0$$

3. Adott az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Határozd meg hány három elemes halmaz képezhető az *A* halmaz elemeiből.

Megoldás:

Mivel három elemes részhalmazokat írunk fel, használjuk a kombináció képletét:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Megoldhatjuk úgy is, hogy felírjuk a három elemes részhalmazokat és megszámoljuk:

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,5\}$

10 részhalmaz van.

Javasolt feladatok:

1. Határozd meg hány olyan háromjegyű szám képezhető a $\{1,2,3,4\}$ halmaz elemeiből, amelynek számjegyei különbözőek.

2. Határozd meg hány darab kétjegyű számot írhatunk fel az $\{1,2,3,4\}$ halmaz elemeivel, ha a számjegyek nem ismétlődnek!

3. Igazold, hogy $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4$.

4. Számítsd ki $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$.

5. Számítsd ki $C_5^2 - V_4^2 + 6$.

6. Számítsd ki $V_5^2 - P_3$.

7. Határozd meg, hogy hány olyan négyjegyű szám képezhető az $\{1,2,3,4\}$ halmaz elemeiből, amelyeknek számjegyei különbözőek.

8. Adott az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmaz. Határozd meg hány olyan háromjegyű szám képezhető az *A* halmaz elemeiből, amelynek számjegyei különbözőek.

9. Adott az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmaz. Határozd meg hány olyan 4 jegyű szám képezhető az *A* halmaz elemeiből, amelynek számjegyei különbözőek.

10. Számítsd ki egy 6 elemű halmaz kételemű részhalmazainak a számát.

11. Oldd meg az $V_4^2 = 12$ egyenletet!

12. Számítsd ki $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4$.

13. Számítsd ki $C_{2008}^2 - C_{2008}^{2006}$.

14. Ellenőrizd az $C_{n+1}^n - C_{n+1}^1 = 0$ egyenlőséget, bármely $n \in \mathbb{N}$.

15. Oldd meg a $C_n^2 = C_n^1 + 2,\ n \in \mathbb{N}$ egyenletet.

16. Oldd meg az $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 56,\ n \in \mathbb{N}$ egyenletet.

17. Határozd meg, hogy hányféleképpen képezhetünk szavakat egy hétbetűs ábécé három, különböző betűjéből.

18. Határozd meg, hányféleképpen választható ki két személy egy 6 fős csapatból.

19. Oldd meg a $C_{n+2}^{n+1} = 2,\ n \in \mathbb{N}$ egyenletet.

20. Oldd meg a $C_x^2 = 21, x \in \mathbb{N}$ egyenletet!

21. Hány darab két elemű részhalmaza van az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmaznak ?

22. Határozzátok meg, hány páratlan természetes szám van a $\{C_7^0,\ C_7^1,\ C_7^2,\ C_7^3\}$ halmazban.

23. Határozzátok meg hány páratlan szám van a $\{C_9^0, C_9^1, C_9^2, C_9^3, C_9^4\}$ halmazban.

Eredmények: 1. $V_4^3 = 24$ **2.** $V_4^2 = 12$ **3.** 5+10+1=16=2^4 **4.** 1-4+6-4+1=0 **5.** 10-12+6=4

6. 20-6=14 7. 4!=24 **8.** $V_6^3 = 120$ **9.** $V_5^4 = 120$ **10.** $C_6^2 = 15$ **11.** n=4 **12.** 21-6-15=0

13. 0 **14.** (n+1)-(n+1)=0 **15.** n=4 **16.** n= 6 **17.** $V_7^3 = 210$ **18.** $C_6^2 = 15$

19. n=0 **20.** x=7 **21.** $C_6^2 = 15$ **22.** $\{1,\ 7,\ 21,\ 35\}, vagyis\ 4$ **23.** $\{1, 9, 36, 84, 126\},\ vagyis\ 2$

5. Fejezet: Valószínűségszámítás

Egy esemény valószínűsége az eseménynek kedvező és a lehetséges esetek számának aránya.

P = $\dfrac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{lehetséges esetek száma}}$

Megoldott feladatok:

1. Határozd meg annak a valószínőségét, hogy a $\{11,12,\ldots,20\}$ halmaz egy elemét kiválasztva, az prímszám legyen.

Megoldás: Prímszámok: 11, 13, 17, 19, vagyis van 4 és van a halmazban összesen 10 szám.

Kedvező esetek száma: 4

Lehetséges esetek száma : 10

$P=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

2. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy kétjegyű természetes számot kiválasztva, az teljes köb legyen.

Megoldás: Felírjuk a teljes köböket, vagyis azokat a számokat, amelyeknek harmadik hatványa kétjegyű: $2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 5^3=125$. A 2 nem jó , mert harmadik hatvány egyjegyű, és az 5 sem jó, mert harmadik hatvány három jegyű. Vagyis csak két ilyen szám van a 3 és a 4.

Kedvező esetek száma: 2

Lehetséges esetek száma : 90, mert ennyi kétjegyű szám van.

$P=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$

3. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy az $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ halmazból kiválasztott valamely kételemű részhalmaz elemeinek az összege kisebb vagy egyenlő legyen 4-nél.

Megoldás: A kételemes részhalmazok számát kombinációval kaphatjuk meg vagy konkrétan felírjuk a halmazokat. $C_6^2=\dfrac{6!}{(6-2)!\cdot 2!}=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2!}=\dfrac{30}{1\cdot 2}=15$

Felírjuk a kételemes részhalmazokat, amelyekben az elemek összege kisebb vagy egyenlő mint 4.

$\{1,2\},\{1,3\},\{2,2\}$

Kedvező esetek száma: 3

Lehetséges esetek száma : 15

$$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy elemet kiválasztva a $\{2,3,4,5\}$ halmazból, az teljesítse a $2^n=n^2$ egyenlőséget.

Megoldás:

Behelyettesítjük a halmaz elemeit: 1. n=2, $2^2=2^2$ (igaz), 2. n=3, $2^3=3^2$, kiszámolva: 8=9, (hamis), 3. n=4, $2^4=4^2$, kiszámolva: 16=16, (igaz), 4. n=5, $2^5=5^2$, kiszámolva: 32=25, (hamis).

Kedvező esetek száma: 2

Lehetséges esetek száma : 4

$$P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

5. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a C_4^2, C_5^2 és C_4^3 számok valamelyike osztható legyen 3-mal.

Megoldás:

Rendre kiszámoljuk a kombinációkat.

$$C_4^2=\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2!}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}=\frac{12}{2}=6, C_5^2=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=\frac{20}{2}=10$$

$$C_4^3=\frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!}=\frac{4!}{1!\cdot 3!}=\frac{3!\cdot 4}{1\cdot 3!}=\frac{4}{1}=4$$

Csak egy szám osztható 3-al.

Kedvező esetek száma: 1

Lehetséges esetek száma : 3

$$P=\frac{1}{3}$$

Javasolt feladatok:

1. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazból kiválasztott valamely n elem teljesítse az $n^2 \leq 2^n$ egyenlőtlenséget.

2. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a $\{3,4,5,6\}$ halmazból kiválasztott valamely elemre teljesüljön a $n(n-1) \geq 20$ egyenlőtlenség .

3. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A=\{1,2,3,4\}$ halmazból kiválasztott valamely n elem teljesítse az $n! < 5$ egyenlőtlenséget.

4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $\{2,3,4,5\}$ halmazból kiválasztott n elem valamelyike teljesítse az $n^2+n>n!$ egyenlőtlenséget.

5. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a $\{0,1,2,3,4,5\}$ halmaz valamely eleme teljesítse az $n!<50$ egyenlőtlenséget.

6. Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy elemet az $A=\{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x-4<14\}$ halmazból , ez teljes négyzet legyen.

7. Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy elemet a $\{C_4^0, C_4^1, C_4^2\}$ halmazból, ez teljes négyzet legyen.

8. Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy elemet a $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ halmazból, ez megoldása legyen az $x^2-4x+3=0$ egyenletnek.

9. **.** Határozzátok meg annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy elemet az $A=\{x \in \mathbb{N}^* | 3x-2 \leq 13\}$ halmazból, ez prímszám legyen.

10. Egy dobozban 49 golyó van. A golyók sorszámozva vannak 1-től 49-ig. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kihúzott golyó sorszáma teljes négyzet legyen!

Eredmények:

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **4.** $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{5}{6}$ **6.** $A=\{1,2,3,4,5\}, \frac{2}{5}$

7. $\{1,4,6\}, \frac{2}{3}$ **8.** $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ **9.** $A=\{1,2,3,4,5\}, \frac{3}{5}$ **10.** 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 vagyis $\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$**.**

6. Fejezet: Gazdasági Matematika

Százalékok és kamatok

Egy adott szám p% -nak (p- procent) kiszámítása a következő képlet alapján számolható ki:

a-nak p százaléka x=$\frac{p}{100} \cdot a$ Ezt a képletet több féleképpen is használhatjuk. Például ha p%-al növeljük egy termék árát, akkor az új ár= $\frac{(100+p)}{100} \cdot a$, ha csökkentjük az árat, akkor az új ár= $\frac{(100-p)}{100} \cdot a$

Ha ismert az a -nak p százaléka, jelöljük ezt x –el. Akkor az eredeti a kiszámítható a következő képlettel: $a = \frac{x \cdot 100}{p}$

Ha ki akarjuk számolni, hogy x az a -nak hány százaléka, akkor ezt így tehetjük:

$$p = \frac{100 \cdot x}{a}$$

Az egyszerű kamat (D –dobândă) az az összeg, amit egy fix összeg lekötése után nyerünk, ha azt egy előre meghatározott periódusra kötjük le. Azt az összeget, amit 100 pénzegység után kapunk egy év után, a kamat rátájának vagy kamat százaléknak nevezzük. Jelöljük ezt p-vel (procentul dobânzii). A megfelelő képlet a következő: $D = \frac{S_0 \cdot p \cdot t}{100}$ ahol S_0 a kezdeti betett összeg, t a periódus (termen- az évek száma). A végső összeg ami rendelkezésünkre fog állni, úgy alakul ki, hogy az eredeti S_0 összeghez hozzáadjuk a kapott kamatot.

A kamatos kamatot úgy számoljuk, hogy a periódus végén mindig hozzáadjuk a kamatot is és úgy számoljuk a további kamatozást. A képlet így módosul: $Végső\ összeg = S_0 \cdot \frac{(1-\frac{ksz}{100}^{p})}{(1-\frac{ksz}{100})}$.

Statisztika

Adott egy számsor: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Ha az átlagukat M-el jelöljük (Media), akkor

$$M = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$$

Ha D-vel jelöljük a számsor szórását (dispersia), akkor

$$D = \sqrt{\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2+(x_3-M)^2+\cdots+(x_n-M)^2}{n}}$$

Megoldott feladatok:

1. Egy árucikknek az ára 15% -os árleszállítás után 102 Ron, mennyi volt az eredeti ár?

Megoldás: Ha 15%-al csökken az ár, akkor az azt jelenti, hogy a 102 Ron az eredeti ár 100-15=85 %-a. Tehát az eredeti ár= $\frac{102 \cdot 100}{85} = 120$

2.Ha egy termék árát először 10%-al majd újabb 20%-al növeljük, milyen ára lesz, ha az eredeti ár 1500 RON volt?

Megoldás? Az első emelés után a termék ára= $\frac{1500\cdot(100+10)}{100} = \frac{1500\cdot 110}{100} = 15\cdot 110 = 1650$ RON. A második áremelés hasonlóan módosítja az árat, kiindulva az előbb kapott értékből: végső ár= $\frac{1650\cdot(100+20)}{100} = \frac{1650\cdot 120}{nw} = 165\cdot 12 = 1980.$

3.Egy termék ára 550 RON. Mennyi az ÁFA (TVA) amit rátesznek, ha az ÁFA a termék árának 26% -a?

Megoldás: Egyszerű százalékszámító képlettel kapjuk meg: ÁFA = $\frac{550\cdot 26}{100} = \frac{55\cdot 26}{10} = 11\cdot 13 = 143$

4.Egy bankba 250 RON-t teszünk be egyszerű p% -os kamatra. Mennyi a p ha egy év után 270 RON lesz a bankban?

Megoldás: Ha az eredeti összeg 250 volt és egy év után 270, akkor azt jelenti, hogy a kamat amit nyertünk = 270-250 =20 Ron. Azt kell kiszámolnunk, hogy ez a 20 hány százaléka a 250-nek?

A képlet alapján: p - kamatszázalék = $\frac{20\cdot 100}{250} = \frac{2\cdot 100}{25} = 2\cdot 4 = 8\,\%$

5.Egy árucikk 600 RON-ba kerül. Egy negyedével leviszik az árát. Hány százalékos drágulás után kapjuk vissza az eredeti árát?

Megoldás: A 600 egynegyede = $\frac{600}{4} = 150$. Ha negyedével csökken az ár, az azt jelenti, hogy az így kapott ár = 600-150=450. Ahhoz, hogy visszakapjuk az eredeti árat, 150 Ron - nal kell emelni. A kérdés az, hogy a 150 hány százaléka a 450-nek? A képlet szerint x = $\frac{150\cdot 100}{450} = \frac{100}{3} = 33{,}33\%$

6.Ha egy üzlet heti bevétele a következő képen alakul: hétfőn 750 RON, kedden 600, szerdán 250 csütörtökön 820, pénteken 930, mennyi lesz a napi átlag?

Megoldás: A képlet szerint az átlag =az összérték/napok száma = $\frac{750+600+250+820+930}{5} = \frac{3350}{5} = 670.$

7. Adott a következő elemekből álló számsor: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 7.$

Mennyi lesz a számsor szórása?

Megoldás : Először ki kell számolnunk az átlagot (médiát) A képlet szerint az átlag = $\frac{1+3+4+5+7}{5} = \frac{20}{5} = 4$ A szórás a képlet szerint = $\sqrt{\frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{3^2+1^2+0^2+1^2+3^2}{5}} = \sqrt{\frac{9+1+0+1+9}{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$

Javasolt feladatok:

1. Ha egy termék ára 360 RON, mennyi lesz ez egy 10%-os áremelés után? E: 396 RON

2.Ha egy termék ára 540 RON mennyi lesz ez egy 20%-os árleszállítás nyomán? E: 432 RON

3.Egy árucikket 8%-os árengedménnyel 460 Ron-ért árulnak. Mennyi volt az eredeti ára? E: 500 RON

4.Egy termék ára ÁFA –val (TVA) együtt 290 RON. Mennyi az eredeti ár ha az ÁFA 16% ? E: 250 RON

5.Egy cég profitja az idei évben 20000 RON, ami a bevétel 5%-a.

Mennyi volt a bevétel? E: 400000 RON

6.Mennyi ÁFA-t (TVA) tettek egy termékre amelyiknek eladási ára 372 RON, ha tudjuk, hogy az ÁFA 24% az eredeti árnak? E: 72 RON

7.Egy autó ára ÁFA (TVA) nélkül 450000 RON.

Mennyi lesz az eladási ár, ha az ÁFA 24% ? E: 558000 RON

8. Ha egy diák jegyei a következők: 7, 5, 9, 10, 8, 7, 6, 4 mennyi lesz átlaga? E: 7

9. Adott a következő elemekből álló számsor: $x_1 = 5, x_2 = 13, x_3 = 11, x_4 = 11.$

Mennyi lesz a számsor szórása? E: 3

7. Fejezet: Vektorok

Vektorok:

Ha $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ és $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ akkor $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$.

Ha $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ akkor $\alpha\vec{u}=\alpha x\vec{i}+\alpha y\vec{j}$.

Ha $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ és $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ akkor $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$.

Vektor koordinátái a síkban:

Ha $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ akkor $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$.

Szakasz felezőpontja:

Ha $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ és M az AB szakasz felezőpontja akkor $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Egyenes egyenlete:

Egyenes iránytényezője: Az $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ pontokon áthaladó egyenes iránytényezője: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Adott ponton áthaladó és adott iránytényezőjű egyenes egyenlete: Az $A(x_1,y_1)$ ponton áthaladó és *m* iránytényezőjű egyenes egyenlete: $y-y_1=m(x-x_1)$.

Az egyenes explicit egyenlete: $y=mx+n$.

Az egyenes általános egyenlete: $ax+by+c=0$ és $m=-\frac{a}{b}$.

Két $d_1: y=m_1x+n_2$ és $d_2: y=m_2x+n_2$ egyenes párhuzamos ha $m_1=m_2, n_1\neq n_2$.

Két $d_1: y=m_1x+n_2$ és $d_2: y=m_2x+n_2$ egyenes egybeeső ha $m_1=m_2, n_1=n_2$.

Két $d_1: y=m_1x+n_2$ és $d_2: y=m_2x+n_2$ egyenes metsző ha $m_1\neq m_2$.

Két $d_1: y=m_1x+n_2$ és $d_2: y=m_2x+n_2$ egyenes merőleges ha $m_1\cdot m_2=-1$.

Gyakorló feladatok

1. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-2\vec{i}+4\vec{j}$ és $\vec{v}=2\vec{i}-5\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki az $5\vec{u}+3\vec{v}$ vektor koordinátáit.
   Megoldás: $5\vec{u}+3\vec{v}=5\left(-2\vec{i}+4\vec{j}\right)+3\left(2\vec{i}-5\vec{j}\right)=-10\vec{i}+20\vec{j}+6\vec{i}-15\vec{j}=-4\vec{i}+5\vec{j}$ tehát $\left(5\vec{u}+3\vec{v}\right)$ vektor koordinátái: $(-4,5)$.

2. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ és $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki a $3\vec{u}+2\vec{v}$ vektor koordinátáit.
   Megoldás: $3\vec{u}+2\vec{v}=3\left(-3\vec{i}+2\vec{j}\right)+2\left(5\vec{i}-\vec{j}\right)=-9\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{i}-2\vec{j}=\vec{i}+4\vec{j}$ tehát $\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)$ vektor koordinátái: $(1,4)$.

3. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-3\vec{i}-4\vec{j}$ és $\vec{v}=-5\vec{i}-3\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki a $6\vec{u}-2\vec{v}$ vektor koordinátáit.
   Megoldás: $6\vec{u}-2\vec{v}=6\left(-3\vec{i}-4\vec{j}\right)-2\left(-5\vec{i}-3\vec{j}\right)=-18\vec{i}-24\vec{j}+10\vec{i}+6\vec{j}=-8\vec{i}-18\vec{j}$ tehát $\left(6\vec{u}-2\vec{v}\right)$ vektor koordinátái: $(-8,-18)$.

4. Adottak az $A(2,-1)$ és $B(-1,3)$ pontok. Számítsd ki az *a* és *b* valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
   Megoldás: Tudva, hogy $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}$ ahol $A\left(x_1,y_1\right)$ és $B\left(x_2,y_2\right)$ tehát $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\vec{i}+\left(3-(-1)\right)\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ ebből következik, hogy $a=-3\, \acute{e}s\, b=4$.

5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(4,-8)$ és $B(6,3)$ pontok. Határozd meg az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
   Megoldás: Mivel $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(4\vec{i}-8\vec{j}\right)+\left(6\vec{i}+3\vec{j}\right)=10\vec{i}-5\vec{j}$ tehát $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(10,-5)$.

6. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $\overrightarrow{OA}=(2,-3)$ és $\overrightarrow{OB}=(1,-2)$ vektorok. Határozd meg azon α és β valós számokat, amelyekre a $3\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái (α,β)
   Megoldás: $\overline{3OA-5OB}=3\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)-5\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)=6\vec{i}-9\vec{j}-5\vec{i}+10\vec{j}=\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\alpha=\beta=1$ tehát $3\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(1,1)$.

7. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-2,5)$ és $B(4,-3)$ pontok. Határozd meg az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!

Megoldás: Mivel $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(-2\vec{i}+5\vec{j}\right)+\left(4\vec{i}-3\vec{j}\right)=2\vec{i}+2\vec{j}$ tehát $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $\left(2,2\right)$.

8. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A\left(1,-6\right)$ és $B\left(-3,-2\right)$ pontok. Határozd meg az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
Megoldás: Mivel $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(\vec{i}-6\vec{j}\right)+\left(-3\vec{i}-2\vec{j}\right)=-2\vec{i}-8\vec{j}$ tehát $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $\left(-2,-8\right)$.

9. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $\overrightarrow{OA}=\left(4,-2\right)$ és $\overrightarrow{OB}=\left(-3,-1\right)$ vektorok. Határozd meg azon α és β valós számokat, amelyekre a $\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $\left(\alpha,\beta\right)$
Megoldás: $\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}=\left(4\vec{i}-2\vec{j}\right)-4\left(-3\vec{i}-\vec{j}\right)=4\vec{i}-2\vec{j}-12\vec{i}+4\vec{j}=-8\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow\alpha=-8,\beta=2$ tehát $\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $\left(-8,2\right)$.

10. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A\left(5,-4\right)$ és $B\left(-3,6\right)$.
Megoldás: Szakasz felezőpontjának koordinátái: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ tehát $M\left(\frac{5-3}{2},\frac{-4+6}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right)=\left(1,1\right)$.

11. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A\left(-2,-8\right)$ és $B\left(7,4\right)$.
Megoldás: Szakasz felezőpontja: $M\left(\frac{-2+7}{2},\frac{-8+4}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{-4}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},-2\right)$.

12. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A\left(-3,-5\right)$ és $B\left(-2,-7\right)$.
Megoldás: Szakasz felezőpontja: $M\left(\frac{-3-2}{2},\frac{-5-7}{2}\right)=\left(\frac{-5}{2},\frac{-12}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},-6\right)$.

13. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A\left(5,4\right)$ és $B\left(9,2\right)$.
Megoldás: Szakasz felezőpontja: $M\left(\frac{5+9}{2},\frac{4+2}{2}\right)=\left(\frac{14}{2},\frac{6}{2}\right)=\left(7,3\right)$.

14. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A\left(3,-2\right)$ és $B\left(1,4\right)$.
Megoldás: Szakasz felezőpontja: $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{2}{2}\right)=\left(2,1\right)$.

15. Határozd meg az $A\left(2,-4\right)$ pont szimmetrikusának koordinátáit a $B\left(1,-2\right)$ pontra nézve!

Megoldás: Legyen C az A pont szimmetrikusa a B pontra nézve, akkor a B pont az AC szakasz felezőpontja. Felírhatjuk, hogy $B\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{2+x_C}{2},\frac{-4+y_C}{2}\right)=(1,-2)$. Tehát

$\frac{2+x_C}{2}=1\,\acute{e}s\,\frac{-4+y_C}{2}=-2\Rightarrow x_C=0, y_C=0\ \Rightarrow C(0,0)$.

16. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(5,-1)$ és $B(3,1)$ pontok. Határozd meg az A pontnak a B pont szerinti szimmetrikusának koordinátáit.
Megoldás: Legyen C az A pont B pont szerinti szimmetrikusa , akkor a B pont az AC szakasz felezőpontja. Felírhatjuk, hogy $B\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{5+x_C}{2},\frac{-1+y_C}{2}\right)=(3,1)$. Tehát

$\frac{5+x_C}{2}=3\,\acute{e}s\,\frac{-1+y_C}{2}=1\Rightarrow x_C=1, y_C=3\ \Rightarrow C(1,3)$

17. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(3,0)$, $B(x,y)$, $C(5,-2)$ pontok. Határozd meg x és y értékét úgy, hogy B az AC szakasz felezőpontja legyen.
Megoldás: Az AC szakasz felezőpontja: $B\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3+5}{2},\frac{0-2}{2}\right)=(4,-1)$

$x=4, y=-1$.

18. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(-2,5)$, $B(x,y)$, $C(-4,-3)$ pontok. Határozd meg x és y értékét úgy, hogy B az AC szakasz felezőpontja legyen.
Megoldás: Az AC szakasz felezőpontja: $B\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-2-4}{2},\frac{5-3}{2}\right)=(-3,1)$

$x=-3, y=1$.

19. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(2,4)$, $B(1,1)$, $C(3,-1)$ pontok. Számítsd ki az ABC háromszögben az A-ból húzott oldalfelező hosszát!
Megoldás: Legyen M a BC oldal felezőpontja $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{1+3}{2},\frac{1-1}{2}\right)=(2,0)$. Az AM oldalfelező hossza: $AM=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(2-2)^2+(4-0)^2}=4$.

20. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(-2,-4)$, $B(3,1)$, $C(-5,-3)$ pontok. Számítsd ki az ABC háromszögben az A-ból húzott oldalfelező hosszát!
Megoldás: Legyen M a BC oldal felezőpontja $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3-5}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(-1,-1)$.
Az AM oldalfelező hossza: $AM=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(-2+1)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{10}$.

21. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(3,-7)$, $B(2,-4)$, $C(-4,0)$ pontok. Számítsd ki az ABC háromszögben az A-ból húzott oldalfelező hosszát!

Megoldás: Legyen M a BC oldal felezőpontja $M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{2-4}{2},\frac{-4-0}{2}\right)=(-1,-2)$.

Az AM oldalfelező hossza: $AM=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(7+2)^2}=\sqrt{97}$.

22. Határozd meg az $A(2,3)$ és $B(-3,-2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

    Megoldás: Az $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ pontokon áthaladó egyenes iránytényezője:

    $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-3}{-3-2}=\frac{-5}{-5}=1$ tehát az AB egyenes egyenlete: $AB: y-3=1\cdot(x-2)$ vagyis $AB: x-y+1=0$.

23. Határozd meg az $A(0,3)$ és $B(-3,0)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

    Megoldás: Az $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ pontokon áthaladó egyenes iránytényezője:

    $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-3}{-3-0}=\frac{-3}{-3}=1$, tehát az AB egyenes egyenlete: $AB: y-3=1\cdot(x+0)\Rightarrow$ $AB: x-y+3=0$.

24. Határozd meg az $A(2,1)$ és $B(1,-2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

    Megoldás: Az $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ pontokon áthaladó egyenes iránytényezője:

    $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-1}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3$ tehát az AB egyenes egyenlete: $AB: y-1=3\cdot(x-2)\Rightarrow$ $AB: 3x-y-5=0$.

25. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak a $d_1: -2x-my+3=0$ és $d_2: mx+y-5=0$ egyenletű egyenesek. Határozd meg az m valós számot, amelyre a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak.

    Megoldás: A egyenesek iránytényezői $m_1=-\frac{2}{m}, m_2=\frac{m}{-1}$. Mivel az egyenesek párhuzamosak

    $m_1=m_2\Rightarrow\frac{-2}{m}=\frac{m}{-1}\Rightarrow m^2=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

26. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak a $d_1: (m+2)x+(m-8)y+1=0$ és $d_2: 2x-(m+1)y+3=0$ egyenletű egyenesek. Határozd meg az m valós számot, amelyre a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak.

    Megoldás: A egyenesek iránytényezői $m_1=-\frac{m+2}{m-8}, m_2=\frac{2}{m+1}$. Mivel az egyenesek párhuzamosak $m_1=m_2\Rightarrow\frac{-m-2}{m-8}=\frac{2}{m+1}\Rightarrow m^2+5m-14=0\Rightarrow m_1=2, m_2=-7$.

27. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak a $d_1: 3x-2my+5=0$ és $d_2: 3mx+(3m-2)y+1=0$ egyenletű egyenesek. Határozd meg az m valós számot, amelyre a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak.

Megoldás: A egyenesek iránytényezői $m_1=\frac{3}{2m}, m_2=\frac{3m}{-3m+2}$. Mivel az egyenesek párhuzamosak $m_1=m_2 \Rightarrow \frac{3}{2m}=\frac{3m}{-3m+2} \Rightarrow 6m^2+9m-6=0 \Rightarrow m_1=-2, m_2=\frac{1}{2}$.

28. Adott az $A(2,3)$ pont. Határozd meg az m valós számot, amelyre az A pont rajta van a $d:2x-y+m=0$ egyenesen.

Megoldás: Mivel A pont rajta van a *d* egyenesen ezért az egyenes egyenletébe behelyettesítjük az x=2 és y=3 értékeket: $A\in d \Rightarrow: 2\cdot 2-3+m=0 \Rightarrow m=-1$.

29. Adott az A(-4,-2) pont. Határozd meg az m valós számot, amelyre az A pont rajta van a $d:3x-y+2m=0$ egyenesen.

Megoldás: Mivel A pont rajta van a *d* egyenesen ezért az egyenes egyenletébe behelyettesítjük az x=-4 és y=-2 értékeket: $A\in d \Rightarrow: 3\cdot(-4)-(-2)+2m=0 \Rightarrow m=5$.

30. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét amely átmegy az $A(1,-2)$ ponton és iránytényezője 2.

Megoldás: Az A ponton áthaladó és m=2 iránytényezőjű egyenes egyenlete:
$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+2=2(x-1) \Leftrightarrow 2x-y-4=0$.

31. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(1,-1)$ ponton, és párhuzamos az $y=x$ egyenlettel!

Megoldás: Az $y=x$ egyenlet iránytényezője m=1 tehát az $A(1,-1)$ pontonáthaladó m=1 iránytényezőjű egyenes egyenlete: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+1=1(x-1) \Leftrightarrow x-y-2=0$.

32. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(2;5)$ ponton és párhuzamos az $x+y-2=0$ egyenletű egyenessel.

Megoldás: Az $x+y-2=0$ egyenletű egyenes iránytényezője m=-1, tehát az $A(2;5)$ ponton áthaladó és m=-1 iránytényezőjű egyenes egyenlete: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow$
$y-5=-1(x-2) \Leftrightarrow x+y-7=0$.

Javasolt feladatok

1. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ és $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki az $5\vec{u}+3\vec{v}$ vektor koordinátáit.
E: $\left(0,7\right)$.

2. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$ és $\vec{v}=5\vec{i}-2\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki az $4\vec{u}+3\vec{v}$ vektor koordinátáit.
E: $\left(11,2\right)$.

3. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ és $\vec{v}=-5\vec{i}-\overrightarrow{2j}$ vektorok. Számítsd ki az $-4\vec{u}-2\vec{v}$ vektor koordinátáit.
E: $\left(2,16\right)$.

4. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ és $\vec{v}=-3\vec{i}-\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki az $2\vec{u}+5\vec{v}$ vektor koordinátáit.
E: $\left(-21,-1\right)$.

5. Az $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ derékszögű koordinátarendszerben adottak az $\vec{u}=-\vec{i}+\vec{j}$ és $\vec{v}=4\vec{i}-2\vec{j}$ vektorok. Számítsd ki az $-\vec{u}+\vec{v}$ vektor koordinátáit.
E: $\left(5,-3\right)$.

6. Adottak az $A\left(-2,-4\right)$ és $B\left(-3,2\right)$ pontok. Számítsd ki az *a* és *b* valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
E: $a=-1\, \acute{e}s\, b=6$.

7. Adottak az $A\left(-3,-5\right)$ és $B\left(-1,-4\right)$ pontok. Számítsd ki az *a* és *b* valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
E: $a=2\, \acute{e}s\, b=1$.

8. Adottak az $A\left(1,3\right)$ és $B\left(5,7\right)$ pontok. Számítsd ki az *a* és *b* valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
E: $a=4\, \acute{e}s\, b=4$.

9. Adottak az $A\left(-5,4\right)$ és $B\left(3,2\right)$ pontok. Számítsd ki az *a* és *b* valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
E: $a=8\, \acute{e}s\, b=-2$.

10. Adottak az $A(6,-3)$ és $B(0,-2)$ pontok. Számítsd ki az *a* és *b* valós számokat úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
E: $a = -6$ *és* $b = 1$.

11. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-4,-1)$ és $B(2,-3)$ pontok. Határozd meg az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
E: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(-2,-4)$.

12. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(3,-1)$ és $B(-6,2)$ pontok. Határozd meg az $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
E: $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(-3,1)$.

13. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(2,-5)$ és $B(-4,-3)$ pontok. Határozd meg az $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
E: $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(16,-1)$.

14. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(3,-2)$ és $B(0,-3)$ pontok. Határozd meg az $-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
E: $-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(-6,-5)$.

15. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-4,-3)$ és $B(-7,-1)$ pontok. Határozd meg az $3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
E: $3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái $(-5,-8)$.

16. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A(3,-2)$ és $B(-4,6)$.
E: $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

17. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A(-4,-3)$ és $B(-7,2)$.
E: $\left(-\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

18. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A(2,-5)$ és $B(-9,5)$.
E: $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

19. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A(3,-4)$ és $B(-3,8)$.
E: $(0,2)$.

20. Határozd meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $A(1,0)$ és $B(-1,4)$.

E: $(0,2)$.

21. Határozd meg az $A(-4,2)$ pont szimmetrikusának koordinátáit a $B(-1,1)$ pontra nézve!
E: $(2,0)$.

22. Határozd meg az $A(-3,-5)$ pont szimmetrikusának koordinátáit a $B(-1,1)$ pontra nézve!
E: $(1,7)$.

23. Határozd meg az $A(3,6)$ pont szimmetrikusának koordinátáit a $B(-1,7)$ pontra nézve!
E: $(-5,8)$.

24. Határozd meg az $A(6,-1)$ pont szimmetrikusának koordinátáit a $B(2,-3)$ pontra nézve!
E: $(-2,-5)$.

25. Határozd meg az $A(-2,-4)$ pont szimmetrikusának koordinátáit a $B(4,-1)$ pontra nézve!
E: $(10,2)$.

26. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az *A*(-1,-1), *B*(2,3), *C*(4,1) pontok. Számítsd ki az *ABC* háromszögben az *A*-ból húzott oldalfelező hosszát!
E: 5.

27. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az *A*(2,-3), *B*(-3,2), *C*(-5,4) pontok. Számítsd ki az *ABC* háromszögben az *A*-ból húzott oldalfelező hosszát!
E: $6\sqrt{2}$.

28. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az *A*(-1,-2), *B*(1,2), *C*(2,-1) pontok. Számítsd ki az *ABC* háromszögben a *C*-ből húzott oldalfelező hosszát!
E: $\sqrt{5}$.

29. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az *A*(-1,0), *B*(2,2), *C*(4,4) pontok. Számítsd ki az *ABC* háromszögben az *A*-ból húzott oldalfelező hosszát!
E: 5.

30. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az *A*(0,4), *B*(-2,0), *C*(8,0) pontok. Számítsd ki az *ABC* háromszögben az *A*-ból húzott oldalfelező hosszát!
E: 5.

31. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(1;1)$, $B(-1;0)$ és $C(3;-4)$ pontok. Számítsd ki az AM szakasz hosszát, ha M a (BC) felezőpontja.
E: 3.

32. Határozd meg az $A(-2,-3)$ és $B(-1,-4)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
    E: x+y+5=0.

33. Határozd meg az $A(3,1)$ és $B(2,2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
    E: x+y-4=0.

34. Határozd meg az $A(-1,3)$ és $B(3,-1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
    E: x+y-2=0.

35. Határozd meg az $A(1,1)$ és $B(-2,-3)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
    E: 4x-3y-1=0.

36. Határozd meg az $A(5,-1)$ és $B(-3,0)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
    E: x+8y+3=0.

37. Az *xOy* derékszögű koordinátarendszerben adottak a $d_1 : 5x + my + 2 = 0$ és $d_2 : 5mx + y - 7 = 0$ egyenletű egyenesek. Határozd meg az *m* valós számot, amelyre a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak.
    E: $m = \pm 1$.

38. Az *xOy* derékszögű koordinátarendszerben adottak a $d_1 : -2x - my - 7 = 0$ és $d_2 : 4x + 2(2m+3)y - 5 = 0$ egyenletű egyenesek. Határozd meg az *m* valós számot, amelyre a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak.
    E: m=-3.

39. Az *xOy* derékszögű koordinátarendszerben adottak a $d_1 : mx - 3y + 1 = 0$ és $d_2 : (3m+1)x - 12y - 2 = 0$ egyenletű egyenesek. Határozd meg az *m* valós számot, amelyre a d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak.
    E: m=1.

40. Adott az *A*(-2,3) pont. Határozd meg az *m* valós számot, amelyre az *A* pont rajta van a $d : 2x - y + m = 0$ egyenesen.
    E: m=7.

41. Adott az *A*(1,-1) pont. Határozd meg az *m* valós számot, amelyre az *A* pont rajta van a $d : 3x - 2y + m = 0$ egyenesen.
    E: m=-5.

42. Adott az *A*(-4,1) pont. Határozd meg az *m* valós számot, amelyre az *A* pont rajta van a $d : 3x + 4y - 2m = 0$ egyenesen.
    E: m=-4.

43. Adott az $A(0,-2)$ pont. Határozd meg az m valós számot, amelyre az A pont rajta van a $d:\sqrt{2}x-y+m=0$ egyenesen.
E: m=-2.

44. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét amely átmegy az $A(2,-3)$ ponton és iránytényezője 3.
E: 3x-y-9=0.

45. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét amely átmegy az $A(-4,-1)$ ponton és iránytényezője $\frac{1}{2}$.
E: x-2y+2=0.

46. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét amely átmegy az $A(3,5)$ ponton és iránytényezője $-\frac{2}{3}$.
E: 2x+3y-21=0.

47. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(1;2)$ ponton és párhuzamos az $4x+2y-3=0$ egyenletű egyenessel.
E: 2x+y-4=0.

48. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(-2;3)$ ponton és párhuzamos az $x+y-5=0$ egyenletű egyenessel.
E: x+y-1=0.

49. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(4;-1)$ ponton és párhuzamos az $3x-y-2=0$ egyenletű egyenessel.
E: 3x-y-13=0.

50. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(-3;-2)$ ponton és párhuzamos az $x-2y-3=0$ egyenletű egyenessel.
E: x-2y-1=0.

11. osztály

1. Fejezet: Mátrixok

Egységmátrix: Az a négyzetes mátrix melynek főátlóján levő összes elem 1, a többi 0.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zérusmátrix: Az összes eleme 0.

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrixok egyenlősége: Két mátrix egyenlő egymással, ha megfelelő elemeik egyenlők.

Műveletek mátrixokkal

Mátrixok összeadása és kivonása:

- csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni vagy kivonni egymásból (ahány sora illetve oszlopa van az egyik mátrixnak, ugyanannyi sora illetve oszlopa legyen a másik mátrixnak is)
- két mátrixot úgy adunk össze, vagy vonunk ki egymásból, hogy a mátrixok megfelelő elemeit összeadjuk, illetve kivonjuk egymásból

Begyakorló példák megoldással

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ mátrixok.
   a) Számítsd ki az $A - B$ mátrixot!
   b) Igazold, hogy $A + B + C = O_2$!

Megoldás:

a) $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 4-2 \\ 2-(-1) & 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A + B + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1-4 & 4+2-6 \\ 2-1-1 & 3+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

2. Bármilyen *a* valós szám esetén adott az $M(a) = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$ mátrix.
   a) Igazold, hogy $M(-1) + M(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   b) Számítsd ki az $M(-2) + M(2)$ mátrixot!

Megoldás:

a) Egy mátrix behelyettesítési értéke *a*-ban azt jelenti, hogy a mátrixba *a* helyébe beírjuk az adott értéket. Ezek alapján:

$$M(-1) + M(1) = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 1 \\ 0 & -2\cdot(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 1 \\ 0 & -2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Az előző ponthoz hasonlóan felírjuk a behelyettesítési értékeket, majd összeadjuk a mátrixokat:

$$M(-2) + M(2) = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) & 1 \\ 0 & -2\cdot(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 1 \\ 0 & -2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ és a $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $A+B=I_3$.

Megoldás:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & -2+2 & 3-3\\ 2-2 & 3-2 & -1+1\\ -3+3 & 1-1 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

4. Legyenek az $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ mátrixok.
Igazold, hogy $A-B=C$.
Megoldás: A mátrixok megfelelő elemeit kivonva egymásból:

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & 0+2 & 2-1\\ 0+1 & -2-0 & 1-0\\ 1-3 & 2-2 & 3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}=C$$

5. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ -2 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -3\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & 2 & y\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok.
Határozd meg *x* és *y* értékét úgy, hogy $A+B=C$ legyen.

Megoldás: Elvégezzük az *A* és *B* mátrixok összeadását, majd felhasználjuk, hogy két mátrix akkor egyenlő egymással, ha megfelelő elemei egyenlők:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ -2 & 5 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -3\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & -2+3 & 0+1\\ -2+3 & 0+2 & 4-3\\ -2-1 & 5-4 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

A kapott mátrixot egyenlővé tesszük a *C*-vel: $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & 2 & y\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, ahonnan a mátrixok egyenlőségéből következik, hogy $x=2$ és $y=1$.

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki az $A+B+C$ mátrixot.
Eredmény: $\begin{pmatrix}4 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix}$
2. Adottak az $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $A-B=I_2$.
3. Bármilyen *a* valós szám esetén adott az $M(a)=\begin{pmatrix}2+a & 0\\ -1 & a-2\end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az $M(0)+M(2)$ mátrixot.
Eredmény: $\begin{pmatrix}6 & 0\\ -2 & -2\end{pmatrix}$
4. Bármilyen *a* valós szám esetén adott az $M(a)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2a\\ 2 & 3-a & 1\\ 3a & 3 & -4\end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az $M(-1)+M(0)+M(1)$ mátrixot.
Eredmény: $\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 6 & 9 & 3\\ 0 & 9 & -12\end{pmatrix}$.
5. Adottak az $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 3 & 4 & -1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 2\\ -6 & -2 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -5\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$ mátrixok.
Igazold, hogy $A+B-C=O_3$.

6. Adottak az $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ -3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ -2 & 0 & -2\\ 6 & -2 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -5 & 0 & -3\\ 10 & -3 & -2\end{pmatrix}$. Igazold, hogy $A+B=C$.
7. Adottak az $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}x & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ mátrixok. Határozd meg *x* értékét úgy, hogy $A+B=C$ legyen.
   Eredmény: $x=3$.
8. Adottak az $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -7 & 2\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}x & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ mátrixok. Határozd meg *x* értékét úgy, hogy $A+C=B$ legyen.
   Eredmény: $x=-1$
9. Adottak az $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & -4\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}0 & x & 4\\ y & 0 & -3\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$ mátrixok. Határozd meg *x* és *y* értékét úgy, hogy $A+B=C$ legyen.
   Eredmény: $x=5, y=0$
10. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ -2 & 5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -3\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & 2 & y\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok.
    Határozd meg *x* és *y* értékét úgy, hogy $A+C=B$ legyen.
    Eredmény: $x=0, y=-7$

Mátrixok szorzása skalárral:

- egy mátrixot úgy szorzunk meg egy állandóval, hogy annak minden elemét megszorozzuk ezzel az állandóval

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki $2A+3B$ értékét.

Megoldás: Használjuk az értelmezést, miszerint egy mátrixot úgy szorzunk egy skalárral, hogy annak minden elemét megszorozzuk vele, majd elvégezzük az összeadást:

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 8\\ 8 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -6\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 11 & -3\end{pmatrix}$$

2. Igazold, hogy $-2A+3B=I_2$, ahol $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -5\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$

Megoldás:

$$-2A+3B=-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 6 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -6 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

3. Adottak az $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -3 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 9\\ -5 & -3 & -10\\ -3 & 2 & 11\end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $A-2B=C$.

Megoldás:

$$A-2B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -3 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-0 & 2-4 & 1+8\\ -3-2 & 3-6 & 0-10\\ 1-4 & 2-0 & 3+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 9\\ -5 & -3 & -10\\ -3 & 2 & 11\end{pmatrix}=C$$

4. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Határozd meg az *m* valós szám értékét úgy, hogy $A+mI_2=B$ legyen.

Megoldás:

$$A + m \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 2+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixok egyenlőségének értelmezéséből következik, hogy $1 + m = 0$ vagy $2 + m = 1$, ahonnan $m = -1$.

5. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ mátrixok. Mennyi lesz az *m* valós szám értéke, ha tudjuk, hogy $A - mI_3 = B$?

Megoldás:

$$A - mI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 3 \\ 1 & 4 & 9-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Két mátrix egyenlő, ha megfelelő elemei egyenlők, vagyis $1 - m = 0$, ahonnan $m = 1$.

6. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az *X* mátrixot, ha tudod, hogy $X + 3I_3 = A$.

   Megoldás: Mivel az *X* mátrix egyetlen eleme sem ismert, a következő formában írhatjuk fel: $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, ahol az *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* és *i* valós számok értékeit kell majd meghatározni.

   $X + 3I_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 & b & c \\ d & e+3 & f \\ g & h & i+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Egyenlővé téve egymással a két mátrixot, vagyis a megfelelő elemeiket:

$$\left.\begin{array}{c} a + 3 = 1 \Rightarrow a = -2 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 2 \\ e + 3 = 3 \Rightarrow e = 0 \\ f = 4 \\ g = 3 \\ h = 4 \\ i + 3 = 1 \Rightarrow i = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki a $-A + 2B$ mátrixot!

   Eredmény: $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Adottak a $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ és $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $2C - D = I_2$.
3. Adottak az $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixok. Határozd meg a $3E - 2F$ mátrixot.

   Eredmény: $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -11 & -10 & -15 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

4. Adottak az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -7 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $2A - B = C$.
5. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -12 & -3 & 0 \\ 9 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -8 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $2A - 3B = O_3$.
6. Határozd meg az *m* valós szám értékét tudva, hogy $A - mB = I_2$, ahol $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.
   Eredmény: $m = 1$.
7. Adott az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az *X* mátrixot, ha tudod, hogy $X + 2I_3 = A$.
   Eredmény: $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.
8. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az *X* mátrixot, ha tudod, hogy $X - 2I_3 = A$.
   Eredmény: $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Mátrixok szorzása:

- két mátrixot akkor tudunk összeszorozni, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával
- a szorzat mátrixot a következőképpen kapjuk: az első mátrix első sorának elemeit rendre szorozzuk a második mátrix első oszlopának elemeivel, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, ez lesz a szorzat mátrix első sorának első eleme. Ezután az első mátrix első sorának elemeit rendre szorozzuk a második mátrix második oszlopának elemeivel, és ezeket a szorzatokat is összeadjuk. Ez lesz a szorzat mátrix első sorának második eleme. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg az első mátrix minden sorának elemeit meg nem szoroztuk a második mátrix minden oszlopának elemeivel.
- a szorzat mátrixnak annyi sora lesz, ahány sora volt az első mátrixnak és annyi oszlopa, ahány oszlopa volt a második mátrixnak

Begyakorló példák megoldással

1. Számítsd ki az $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok négyzetét!

Megoldás:

Bármely mátrix négyzetét megkapjuk, ha a mátrixot önmagával szorozzuk.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot(-1)+3\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 0 \\ -1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1 & -1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 2 & -1\cdot 3+(-1)\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 1+2\cdot(-1)+0\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot(-1)+0\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ és a $B=A-I_3$ mátrixok. Számítsd ki A^2-B^2-et!

Megoldás:
Meghatározzuk a B mátrixot:

$$B=A-I_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezek után már kiszámíthatjuk az A és B mátrixok négyzetét:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & -4 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & -4 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ -12 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki az $A\cdot B+2I_2$ mátrixot!

Megoldás:

$$A\cdot B+2I_2=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -20 & 28 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 & 28 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$$

4. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ és a $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok. Igazold, hogy $A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Megoldás:
Kiszámoljuk a mátrixok szorzatát,majd ezen szorzatokat kivonjuk egymásból:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki az $A\cdot B$ mátrixot.

Megoldás: Mivel az A mátrix oszlopainak száma 3, ami megegyezik a B mátrix sorainak számával, ezért a szorzás elvégezhető. Az eredmény egy 2x3-as mátrix lesz.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+6 & 2+2+9 & 3+4+12 \\ 1+0+8 & 2+0+12 & 3+0+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 19 \\ 9 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Javasolt feladatok eredménnyel

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki $A^2 + B^2$-t!

Eredmény: $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$

2. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixok. Számítsd ki $A^2 + A \cdot B$-t!

Eredmény: $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 17 \\ 1 & 24 & -3 \\ 15 & 13 & 35 \end{pmatrix}$

3. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok. Határozd meg az $A \cdot B - 3I_3$ mátrixot!

Eredmény: $\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ -8 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Adott az $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Számítsd ki: $A^2 - 2A + I_3$.

Eredmény: $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -4 & -8 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$. Igazold, hogy $A^2 = O_2$.

6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Igazold, hogy $A^2 = 6A$.

7. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixok. Határozd meg az *x* valós szám értékét tudva, hogy $A + B = A \cdot B - C$

Eredmény: $x = 2$

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Igazold, hogy $A^2 + A = O_2$

9. Legyenek $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$. Számítsd ki $2A \cdot B - B \cdot A$-t!

Eredmény: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 2+x & 2x \\ x-3 & 3x-1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol *x* egy tetszőleges valós szám. Számítsd ki az $A(1) \cdot A(0)$ mátrixot!

Eredmény: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

2. Fejezet: Determinánsok

Mátrixok determinánsa:

Ha $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix, akkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Ha $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mátrix, akkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$
$$-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Harmadrendű determináns mértani alkalmazásai:

1. Két $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete:

$$AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2. Három $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)\, és\, C(x_3,y_3)$ pont akkor és csak akkor kollineáris, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3. Az $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)\, és\, C(x_3,y_3)$ pontok által alkotott háromszög területe $T=\frac{1}{2}|\Delta|$

ahol $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$

Gyakorló feladatok

1. Határozd meg az $A(2,3)$ és $B(-3,-2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

   Megoldás: Az AB egyenes egyenlete: $AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$

   $AB:3x-3y-4+9+2x-2y=0\Rightarrow AB:5x-5y+5=0\Rightarrow AB:x-y+1=0$.

2. Határozd meg az $A(0,3)$ és $B(-3,0)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

   Megoldás: Az AB egyenes egyenlete: $AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow AB:3x-3y+9=0\Rightarrow$

   $AB:x-y+3=0$.

3. Határozd meg az $A(2,1)$ és $B(1,-2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

   Megoldás: Az AB egyenes egyenlete: $AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$

   $AB:x+y-4-1+2x-2y=0\Rightarrow AB:3x-y-5=0$.

4. Számítsd ki az $A(2;0)$, $B(0;4)$ és $C(1;6)$ pontok által meghatározott háromszög területét.

   Megoldás: $A(2;0)$, $B(0;4)$ és $C(1;6)$ pontok által alkotott háromszög területe $T=\frac{1}{2}|\Delta|$

   ahol $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=8-4-12=-8\Rightarrow T=\frac{1}{2}|-8|=4$.

5. Számítsd ki az $A(2;1)$, $B(1;3)$ és $C(-3;2)$ pontok által meghatározott háromszög területét.

   Megoldás: A háromszög területe $T=\frac{1}{2}|\Delta|$ ahol $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6+2-3+9-4-1=9$

   $\Rightarrow T=\frac{9}{2}$.

6. Számítsd ki az $A(5;-4)$, $B(1;0)$ és $C(-1;3)$ pontok által meghatározott háromszög területét.

Megoldás: A háromszög területe $T=\frac{1}{2}|\Delta|$ ahol $\Delta=\begin{vmatrix}5 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=3+4-15+4=-4$

$\Rightarrow T=\frac{1}{2}|-4|=2$.

7. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(1,1)$, $B(2,3)$ és $C(3,m)$ pontok. Határozd meg az m valós értékét, amelyre az *A*, *B* és *C* pontok kollineárisak.

   Megoldás: Az A, B, C pontok kollineárisak ha $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & m & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3+2m+3-9-m-2=0\Rightarrow$

   $m-5=0\Rightarrow m=5$.

8. Határozd meg $m\in\mathbb{R}$ értékét amelyre az $A(2,4), B(3,3)$ és $C(m,5)$ pontok kollineárisak.

   Megoldás: Az A, B, C pontok kollineárisak ha $\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ m & 5 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$

   $6+4m+15-3m-10-12=0\Rightarrow m-1=0\Rightarrow m=1$.

9. Határozd meg az m valós értékeit úgy, hogy az $A(1,3)$, $B(2,5)$ és $C(3,m)$ pontok kollineárisak legyenek.

   Megoldás: Az A, B, C pontok kollineárisak ha $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & m & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 5+2m+9-15-m-6=0\Rightarrow$

   $m-7=0\Rightarrow m=7$.

10. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $O(0,0)$ és $A_n(n,2n+1)$ pontok, ahol $n\in\mathbb{N}$.

    a) Írd fel az A_1A_2 egyenes egyenletét.

    b) Számítsd ki az OA_1A_2 háromszög területét.

    c) Bizonyítsd be, hogy az $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$ pontok kollineárisak.

    Megoldás:

    a) az $A_1(1,3)$ illetve $A_2(2,5)$ pontok által meghatározott egyenes egyenlete:

    $A_1A_2: 2x-y+1=0$.

    b) Az OA_1A_2 háromszög területe $T=\frac{1}{2}|\Delta|$ ahol $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=5-6=-1\Rightarrow T=\frac{1}{2}|-1|=\frac{1}{2}$.

c) Legyen $A_n(n,2n+1)$, $A_m(m,2m+1)$ és $A_p(p,2p+1)$ három pont $\begin{vmatrix} n & 2n+1 & 1 \\ m & 2m+1 & 1 \\ p & 2p+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$2nm+n+2mp+m+2np+p-2mp-p-2np-n-2nm-m=0 \Rightarrow A_n, A_m, A_p$ pontok kollineárisak.

11. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(7,4)$, $B(a,a)$ és $C(3,-2)$ pontok, ahol $a \in \mathbb{R}$.

a) Ha $a=0$ számítsd ki az ABC háromszög területét.

b) Ha $a=-2$ írd fel a B és C pontokon áthaladó egyenes egyenletét.

Megoldás:

a) Az ABC háromszög területe $T=\frac{1}{2}|\Delta|$ ahol $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12+14=26 \Rightarrow T=\frac{26}{2}=13$.

b) A BC egyenes egyenlete: $BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow BC: y+2=0$.

12. Adott az $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és legyen $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n-szer}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Számítsd ki az A. mátrix determinánsát.

b) Igazold, hogy $A^2 + A^3 = O_2$.

Megoldás:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6+6=0$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + A^3 = O_2$.

13. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazból.

a) Igazold, hogy $AB = BA$.

b) Számítsd ki $A^2 + B^2$, ahol $A^2 = A \cdot A$ és $B^2 = B \cdot B$.

Megoldás: a) $AB = BA = O_2$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$ és $B^2 = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$.

Javasolt feladatok

1. Határozd meg az $A(1,1)$ és $B(4,3)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
   E: $AB: 2x-3y+1=0$.

2. Határozd meg az $A(-9,-3)$ és $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
   E: $AB: x-2y+3=0$.

3. Határozd meg az $A(3,1)$ és $B(1,2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
   E: $AB: x+2y-5=0$.

4. Számítsd ki az $A(2;-1)$, $B(3;4)$ és $C(-2;3)$ pontok által meghatározott háromszög területét.
   E: $T=12$.

5. Számítsd ki az $A(-2;-3)$, $B(2;5)$ és $C(3;-4)$ pontok által meghatározott háromszög területét.
   E: $T=22$.

6. Számítsd ki az $A(2;0)$, $B(-1;2)$ és $C(-1;-2)$ pontok által meghatározott háromszög területét.
   E: $T=6$.

7. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(-3,1)$, $B(-1,3)$ és $C(m,7)$ pontok. Határozd meg az *m* valós értékét, amelyre az *A*, *B* és *C* pontok kollineárisak.
   E: m=3.

8. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(-1,6)$, $B(1,2)$ és $C(3,-2)$ pontok. Határozd meg az *m* valós értékét, amelyre az *A*, *B* és *C* pontok kollineárisak.
   E: m=-2.

9. Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(-1,-1)$, $B(-5,1)$ és $C(3,m)$ pontok. Határozd meg az *m* valós értékét, amelyre az *A*, *B* és *C* pontok kollineárisak.
   E: m=-3.

10. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $O(0,0)$ és az $A_n(n+2,3n-2)$ pontok, ahol $n\in\mathbb{N}$.
    a) Írd fel az A_1 és A_2 pontok által meghatározott egyenes egyenletét.
    b) Számítsd ki az OA_0A_1 háromszög területét.
    c) Bizonyítsd be, hogy az A_1, A_2 és A_n pontok kollineárisak bármely $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ esetén.
    E: a) -3x+y+8=0.
    b) T=4.

c) Igazold, hogy $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ n+2 & 3n-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

11. Adottak az $A_n\left(n, n^2\right)$ pontok, ahol $n \in \mathbb{N}$.

a) Határozd meg az A_0A_1 egyenes egyenletét.

b) Számítsd ki az $A_0A_1A_2$ háromszög területét.

E: a) y=x

b) T=1

12. Az *xOy* derékszögű koordináta rendszerben adottak az $O(0,0)$ és $A_n(n, n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ pontok.

a) Írd fel az A_0A_1 egyenes egyenletét.

b) Igazold, hogy az A_0, A_1, A_2 pontok kollineárisak.

c) Bizonyítsd be, hogy az OA_nA_{n+1} háromszög területe nem függ az n természetes számtól.

E: a) x-y+2=0

b) Igazold, hogy $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

c) Igazold, hogy $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ n & n+2 & 1 \\ n+1 & n+3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow$ az OA_nA_{n+1} háromszög területe nem függ az n-től.

13. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(2,1), B(1,2)$ és $C_n(n, -n)$ pontok, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

a) Írd fel a C_4C_2 egyenes egyenletét.

b) Igazold, hogy az O, C_n, C_{n+1} pontok kollineárisak, bármely $n \in \mathbb{Z}^*$.

c) Számítsd ki az ABC_3 háromszög területét.

E: a) x+y=0

b) Igazold, hogy $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & -n & 1 \\ n+1 & -n-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

c) Az ABC_3 háromszög területe $T = \frac{1}{2}|\Delta|$ ahol $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow T = \frac{3}{2}$.

14. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok.

a) Számítsd ki: A^2, ahol $A^2 = A \cdot A$.

b) Igazold, hogy $AB - 2B = O_2$.

E: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB - 2B = O_2$.

15. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ és az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.

a) Igazold, hogy $A^2 = 2I_2$, ahol $A^2 = A \cdot A$.

b) Határozd meg $x \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $\det(A - xI_2) = 0$.

E: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$

b) $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - xI_2) = x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

16. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ négyzetes mátrixok halmazában adott az $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix.

Jelöljük $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n-szer}, n \in \mathbb{N}^*$

a) Igazold, hogy $A + A^2 = 2A$.

b) Határozd meg az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ mátrixokat úgy, hogy $\det(X + A) = 2$.

E: a) $A^2 = A \Rightarrow A + A^2 = A + A = 2A$.

b) $X + A = \begin{pmatrix} x+4 & -6 \\ 2 & x-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X + A) = x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$

3. Fejezet: Függvények deriválása

Értelmezés:

1. Legyen $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R},$ függvény és $x_0 \in D$ a D halmaz egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy

az f függvény az x_0 pontban deriválható, ha a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték létezik és véges.

Ezt a határértéket az f függvény x_0 pontban vett deriváltjának nevezzük és $f'(x_0)$ szimbólummal

jelöljük. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

2. Az f függvény deriválható a D halmazon, ha deriválható annak minden pontjában.
Értelmezhetjük a derivált függvényt.

Elemi függvények deriváltja:

1. $(c)' = 0, \quad \forall c = \textit{állandó}$

2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall a \in (0;\infty) - \{1\}$

6. $(e^x)' = e^x$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}, \quad \forall a \in (0;\infty) - \{1\}$

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. $(\sin x)' = \cos x$

10. $(\cos x)' = -\sin x$

11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Megjegyzés: Mindenhol figyelni kell az értelmezési tartományra.

Műveletek deriválható függvényekkel:

1. Összeg és különbség deriváltja: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2. Állandóval való szorzás: $(c \cdot f)' = c \cdot f', \quad \forall c = \text{állandó}$

3. Szorzat deriváltja: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

4. Hányados deriváltja: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

5. Összetett függvény deriváltja: $\left[(g \circ f)(x)\right]' = \left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

6. Magasabb rendű derivált: - másodrendű derivált - $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

- harmadrendű derivált - $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$

Megoldott feladatok:

1. Számítsátok ki a deriváltfüggvényt illetve a másodrendű deriváltat az alábbi esetekben:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 + x^2 - 5$

Mivel egy összeget deriválunk, külön-külön deriváljuk mindegyiket.

$$f'(x) = \left(4x^3\right)' + \left(x^2\right)' - (5)' = 4 \cdot \left(x^3\right)' + 2x - 0 = 4 \cdot 3x^2 + 2x = 12x^2 + 2x.$$

A másodrendű derivált kiszámításánál, deriváljuk az elsőrendű deriváltat.

$f''(x) = \left(12x^2\right)' + (2x)' = 12 \cdot \left(x^2\right)' + 2(x)' = 12 \cdot 2x + 2 \cdot 1 = 24x + 2$.(x deriváltja egyenlő 1)

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 8x^4 + \ln x + 7$

Megint egy összeget deriválunk, ezért külön-külön deriváljuk mindegyiket.

$$f'(x) = \left(8x^4\right)' + (\ln x)' + (7)' = 8 \cdot \left(x^4\right)' + \frac{1}{x} + 0 = 8 \cdot 4x^3 + \frac{1}{x} = 32x^3 + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \left(32x^3\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 32\left(x^3\right)' + \left((x)^{-1}\right)' = 32 \cdot 3x^2 + (-1)x^{-1-1} = 96x^2 - x^{-2} =$$

$$= 96x^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Az $\frac{1}{x}$ -et átírtuk, mint x^{-1}.

2. Számítsátok ki a deriváltfüggvényt az alábbi esetekben:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4+2\ln x-4\sqrt{x}$

$$f'(x)=\left(x^4\right)'+\left(2\ln x\right)'-\left(4\sqrt{x}\right)'=4\cdot x^3+2\cdot(\ln x)'-4\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=4\cdot x^3+2\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^3\cdot\left(e^x+2\right)$

Mivel két függvény szorzata jelenik meg, alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválást.

$$f'(x)=\left(4x^3\right)'\cdot\left(e^x+2\right)+4x^3\left(e^x+2\right)'=4\cdot\left(x^3\right)'\cdot\left(e^x+2\right)+4x^3\cdot e^x=12x^2\left(e^x+2\right)+4x^3\cdot e^x$$

c) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3x^2+x}{x-2}.$

Törtként deriváljuk:

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+x\right)'\cdot(x-2)-\left(3x^2+x\right)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{(6x+1)\cdot(x-2)-\left(3x^2+x\right)\cdot 1}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{6x^2-12x+x-2-3x^2-x}{(x-2)^2}=\frac{3x^2-12x-2}{(x-2)^2}.$$

3. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}-2008(x-1)-1$ függvényt.

a) Számítsd ki az f függvény deriváltját.

b) Számítsd ki $f(0)+f'(0)$.

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket.

d) Számítsd ki az $f''(x),\ x\in\mathbb{R}$.

Megoldás:

a) Deriváljuk a függvényt:

$$f'(x)=\left(x^{2008}\right)'-\left(2008(x-1)\right)'-1'=2008x^{2007}-2008\cdot(x-1)'=2008x^{2007}-2008$$

Mivel $(x-1)'=1$

b) Behelyettesítjük a 0-át:

$f(0)=0-2008\cdot(0-1)-1=2008-1=2007$, $f'(0)=0-2008=-2008$

$f(0)+f'(0)=2007-2008=-1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-2008$

d) $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(2008x^{2007}-2008\right)'=2007\cdot 2008x^{2006}$

Javasolt feladatok:

1. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x),\quad x\in(0,+\infty)$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket.

2. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x),\quad x\in(0,+\infty)$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket.

3. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$ függvényt.

a) Ellenőrizd, hogy $f'(x)=4x$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket.

4. Tekintsük az $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x),\quad x\in[0,1]$.

b) Igazold, hogy $f(0)+f'(0)=\dfrac{3}{4}$.

5. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x),\quad x\in\mathbb{R}$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket.

6. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\ln x$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x),\quad x\in(0,\infty)$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket.

7. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x),\ \ x\in\mathbb{R}$.

b) Számítsd ki az $f''(x), x\in\mathbb{R}$.

8. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$ függvényt.

a) Számítsd ki az f függvény deriváltját.

b) Számítsd ki az $f''(x), x\in\mathbb{R}$.

9. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$ függvényt.

a) Számítsd ki az $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Mutasd ki, hogy $f(1)-f'(1)=1$.

10. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$ függvényt.

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket.

b) Számítsd ki az $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

c) Oldd meg $\mathbb{R}$-en az $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$ egyenletet.

11. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$ függvényt.

a) Számítsd ki: $f'(x),\ \ x\in(0,\infty)$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket.

Eredmények:

1. a) $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1-\dfrac{2}{1}=1-2=-1$

2. a) $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x}{(x+1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$

3. a) $f(x)=x^2+2x+1+x^2-2x+1=2x^2+2$ $f'(x)=4x$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$

4. a) $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ **b)** $f(0)+f'(0)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

5. a) $f'(x)=e^x\left(x^2-1\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=e^0(0-1)=-1$

6. a) $f'(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ **b)** $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$

7. a) $f'(x) = e^x - 1$ **b)** $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = e^x$.

8. a) $f'(x) = e^x - 1$ **b)** $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = e^x$

9. a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ **b)** $f(1) - f'(1) = 1 - \ln 1 - (1-1) = 1 - 0 - 0 = 1.$

10. a) $f'(x) = 2x + e^x$ **b)** $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 + e^0 = 1$

c) $f''(x) = 2 + e^x$, $2x + e^x - \left(2 + e^x\right) + x^2 + e^x = e^x - 3$, $2x + e^x - 2 - e^x + x^2 + e^x = e^x - 3$,
$x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

11. a) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ **b)** $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$

12. osztály

1. Fejezet: Algebrai Műveletek

Értelmezés: Legyen M egy nem üres halmaz. Egy olyan függvényt amelynek értelmezési tartománya az M x M halmaz a képhalmaza pedig az M halmaz M halmazon értelmezett műveletnek nevezünk.

A műveleteket különböző jelekkel jelöljük. Például: $*, +, \cdot, \oplus, \odot$, T , $\circ$, stb., a művelet „eredményét" pedig $x * y$, x+y, $x \cdot y$, $x \oplus y$, $x \odot y$ stb. jelöli. Fontos, hogy a művelet „eredménye" az M halmazból legyen.

Értelmezés: Legyen „ * " az M nem üres halmazon értelmezett művelet. Az $A \subset M$ halmazt az M stabil részhalmazának nevezzük a „ * „ műveletre nézve, ha bármely $x, y \in A$ esetén

$x * y \in A$

A műveletek tulajdonságai:

Legyen „$*$" az M halmazon értelmezett művelet. Azt mondjuk, hogy a művelet

1. Kommutatív, ha bármely $x, y \in M$ esetén $x * y = y * x$
2. Asszociatív, ha bármely $x, y, z \in M$ esetén $(x * y) * z = x * (y * z)$
3. Van semleges elem az M halmazban a „ $*$ „ műveletre nézve, ha létezik olyan $e \in M$, hogy bármely $x \in M$ esetén $x * e = e * x = e$.
4. Az $x \in M$ elem szimmetrizálhatóa „ $*$ „műveletre nézve, ha a „ $*$ „ művelet asszociatív és van semleges elem (e) a halmazban a műveletre nézve és létezik $x' \in M$ úgy, hogy $x * x' = x' * x = e$. Ekkor x' az x elem szimmetrikusa. Sajátosan, additív írásmód esetén (+), a szimmetrikust ellentettnek, multiplikatív írásmód esetén ($\cdot$) inverznek is mondjuk.
5. Ha „ $*$ „ és „$\circ$ „ az M halmazon értelmezett műveletek, azt mondjuk, hogy a „$\circ$ „ disztributív a „ $*$ „ műveletre nézve, ha bármely $x, y, z \in M$ estén
   $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ (baloldali disztributivitás)
   $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$ (jobboldali disztributivitás)

Megoldott feladatok:

1. A valós számok R halmazán értelmezzük az $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ műveletet.
   a) Számítsd ki $2 \circ (-3)$ -at
   b) Igazold, hogy a művelet kommutatív.
   c) Igazold,hogy $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$.
   d) Igazold, hogy a művelet asszociatív.
   e) Számítsd ki $x \circ (-4)$ –et.
   f) Számítsd ki $(-10) \circ (-9) \circ (-8) \ldots 8 \circ 9 \circ 10$ értékét.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az adott műveletet (x helyére 2-t, y helyére -3 –at írunk és elvégezzük a műveleteket).
$2 \circ (-3) = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 12 = -6 + 8 - 12 + 12 = 2$

b) A kommutativitáshoz igazolnunk kell, hogy $\forall$ x, y $\in$ R esetén $x \circ y = y \circ x$
$x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$

$y \circ x = yx + 4y + 4x + 12 = xy + 4x + 4y + 12$ (a valós számok szorzása és összeadása kommutatív)

Mivel ugyanazt az eredményt kaptuk $\Rightarrow$ a „$\circ$ „ művelet kommutatív.

c) $(x + 4)(y + 4) - 4 = xy + 4x + 4y + 16 - 4 = xy + 4x + 4y + 12 = x \circ y$

d) Az asszociativitáshoz igazolni kell, hogy $\forall$ x, y, z $\in$ R esetén $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Kiszámítjuk mindkét oldalt:

$(x \circ y) \circ z = (xy + 4x + 4y + 12) \circ z = (xy + 4x + 4y + 12)z + 4(xy + 4x + 4y + 12) + 4z + 12 =$

$= xyz + 4xz + 4yz + 12z + 4xy + 16x + 16y + 48 + 4z + 12 = xyz + 4xz + 4yz + 4xy + 16x + 16y + 16z + 60$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (yz + 4y + 4z + 12) = x(yz + 4y + 4z + 12) + 4x + 4(yz + 4y + 4z + 12) + 12 =$

$= xyz + 4xy + 4xz + 12x + 4x + 4yz + 16y + 16z + 48 + 12 = xyz + 4xz + 4yz + 4xy + 16x + 16y + 16z + 60$

Másképp: Alkalmazzuk az $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$ alakot

$(x \circ y) \circ z = [(x + 4)(y + 4) - 4] \circ z = [(x + 4)(y + 4) - 4 + 4](z + 4) - 4 =$

$= (x + 4)(y + 4)(z + 4) - 4$

$x \circ (y \circ z) = x \circ [(y + 4)(z + 4) - 4] = (x + 4)[(y + 4)(z + 4) - 4 + 4] - 4 =$

$= (x + 4)(y + 4)(z + 4) - 4$

Mivel ugyanazt az eredményt kaptuk mindkét oldalon $\Rightarrow$ a „ $\circ$ „ művelet asszociatív.

e) $x \circ (-4) = x \cdot (-4) + 4x + 4 \cdot (-4) + 12 = -4x + 4x - 16 + 12 = -4.$

f) Az e) alpont alapján tudjuk, hogy $x \circ (-4) = -4$ és mivel a művelet kommutatív a b) alpont alapján $(-4) \circ x = -4$. A d) alapján a művelet asszociatív tehát
$(-10) \circ (-9) \circ (-8) \circ \ldots \circ (-5) \circ [(-4) \circ (-3)] \circ (-2) \circ \ldots \circ 8 \circ 9 \circ 10 =$
$(-10) \circ (-9) \circ (-8) \circ \ldots \circ (-5) \circ [(-4) \circ (-2)] \circ (-1) \circ \ldots \circ 8 \circ 9 \circ 10 = \ldots =$
$= (-10) \circ (-9) \circ (-8) \circ \ldots \circ (-6) \circ [(-5) \circ (-4)] = \ldots = (-10) \circ (-9) \circ (-8) \circ \ldots \circ (-5) \circ (-4) =$
$= \ldots = -4$

2. A valós számok halmazán adott az $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$ művelet. Oldd meg az $x * x = 11$ egyenletet.
Megoldás: Alkalmazzuk az adott műveletet. Az egyenlet így alakul:
$(x - 3)(x - 3) + 3 = 12$. Megoldjuk a kapott egyenletet:
Első megoldás:

$(x - 3)^2 = 12 - 3$

$(x - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow |(x - 3)| = 3$

Tehát $x - 3 = -3 \Rightarrow x_1 = 0$ vagy $x - 3 = 3 \Rightarrow x_2 = 6$.

Második megoldás:

$(x - 3)(x - 3) + 3 = 12$. Elvégezzük a számításokat, majd rendezzük az egyenletet. A következő másodfokú egyenlethez jutunk: $x^2 - 6x = 0$. Megoldjuk az egyenletet: $\Delta = 36$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

3. Adott az M = $\left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} a \in R \right\}$ halmaz.
   a) Igazold, hogy *A(a)A(b) = A(2ab)* minden a és b valós szám esetén.
   b) Igazold, hogy az A($\frac{1}{2}$) az M halmaz semleges eleme a mátrixok szorzására nézve.
   c) Határozd meg az A(1) mátrix szimmetrikusát az M halmazban a mátrixok szorzására nézve.

Megoldás:

a) Kiszámítjuk a két mátrix szorzatát

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $A(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$

$A(a)\,A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}$ = A(ab) bármely a, b valós szám esetán.

b) Igazolni kell, hogy minden A(a) ∈ M matrix esetén A(a) A($\frac{1}{2}$) = A($\frac{1}{2}$) A(a) = A(a)

Felhasználjuk az a) pontban kapott eredményt: A(a) A($\frac{1}{2}$) = A(2a· $\frac{1}{2}$) = A(a)

A($\frac{1}{2}$) A(a) = A(2· $\frac{1}{2}$ a) = A(a). Tehát az A($\frac{1}{2}$) semleges elem az M halmazban a mátrixok szorzására nézve.

c) Mivel az asszociativitás a mátrixok szorzásának általános tulajdonsága, a művelet az M halmazon asszociatív és a halmazban van semleges elem a szorzásra nézve .(b) alpont) beszélhetünk az elemek szimmetrizálhatóságáról.

Legyen A(a) , A(b) ∈ M két tetszőleges matrix.

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $A(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b$. Tehát A(a) = A(b) ⇔ a = b. (1)

Az A(1) mátrix szimmetrikusa az A(x) mátrix, ha A(1)A(x) = A(x)A(1) = A($\frac{1}{2}$). Meg kell határoznunk az x-et. Vizsgáljuk először a művelet kommutativitását:

A(a)A(b) = A(2ab) = A(2ba) = A(b)A(a), tehát a művelet kommutatív. Ezért elegendő egy egyenletből kiszámítani az x értékét.

A(1)A(x) = A($\frac{1}{2}$) ⇒ A(2x) = A ($\frac{1}{2}$). Az (1) alapján ez az egyenlőség cask akkor igaz, ha $2x = \frac{1}{2}$ ahonnan $x = \frac{1}{4} \in R$. Tehát az A(1) mátrix szimmetrikusa az M halmazban az

$A(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} ¼ & 0 & ¼ \\ 0 & 0 & 0 \\ ¼ & 0 & ¼ \end{pmatrix} \in M$.

4. Az egész számok Z halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 3$ és $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$ műveleteket.
   a) Oldjuk meg az egész számok Z halmazán az $x \circ x = 12$ egyenletet.
   b) Mutassuk ki, hogy $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$
   c) Oldjuk meg a $Z \times Z$ halmazon az $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$ egyenletrendszert.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a " ° " műveletet, majd megoldjuk a kapott egyenletet.
   $x \cdot x - 3(x + x) + 12 = 12$
   $x^2 - 6x = 0$ ahonnan az egyenlet megoldása után $x_1 = 0$ és $x_2 = 6$ egész gyököket kapjuk, tehát mindkét érték megoldása az adott egyenletnek.

b) Elvégezzük a számításokat:
   $1 \circ (2 + 3 - 3) = [1 \cdot 2 - 3(1 + 2) + 12] * [1 \cdot 3 - 3(1 + 3) + 12]$
   $1 \circ 2 = [2 - 9 + 12] * [3 - 12 + 12]$
   $1 \cdot 2 - 3(1 + 2) + 12 = 5 * 3$
   $2 - 9 + 12 = 5 + 3 - 3$
   $5 = 5$ igaz egyenlőséghez jutottunk, ami azt jelenti, hogy az adott egyenlőség is igaz.
c) Alkalmazzuk a megfelelő műveleteket, majd megoldjuk a kapott egyenletrendszert.

$$\begin{cases} (x-3) + y - 3 = 2 \\ (x-y) \cdot 4 - 3(x - y + 4) + 12 = 10 \end{cases}$$

$\begin{cases} x + y - 6 = 2 \\ 4x - 4y - 3x + 3y - 12 + 12 = 10 \end{cases}$. Rendezzük az egyenleteket.

$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 10 \end{cases}$. Összeadjuk a két egyenletet és a $2x = 18$ egyenlethez jutunk, ahonnan $x = 9$ egész szám, tehát kiszámítjuk y-t. A kapott x értéket behelyettesítjük az első egyenletbe $9 + y = 8$, $y = -1$ egész szám. Tehát az egyenletrendszer megoldása $\begin{cases} x = 9 \\ y = -1 \end{cases}$.

5. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - x - y + 2$ műveletet. Igazold hogy az $(1, +\infty)$ intervallum stabil részhalmaza R – nek az adott műveletre nézve.

Megoldás: Igazolnunk kell, hogy $\forall\ x, y \in (1, +\infty)$ esetén $x * y \in (1, +\infty)$.

Tudjuk, hogy $x, y \in (1, +\infty)$, vagyis $x > 1$ és $y > 1$, ahonnan $x - 1 > 0$ és $y - 1 > 0$. Ekkor

$(x - 1)(y - 1) > 0$. Elvégezzük a szorzást, az $xy - x - y + 1 > 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Mindkét oldalához hozzáadunk 1-et: $xy - x - y + 2 > 1$ .A bal oldalon $x * y$ jelent meg, tehát az egyenlőtlenség $x * y > 1$ alakban írható, vagyis $x * y \in (1, +\infty)$, amit igazolni kellett.

Javasolt feladatok:

1. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$ műveletet.
   a) Ellenőrizd, hogy $x \circ y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$ bármely x, y valós szám esetén.
   b) Oldd meg a valós számok halmazán az $x \circ x = 11$ egyenletet. M: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 2(x + y) + 6$ műveletet.
   a) Igazold, hogy $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$.

b) Bizonyítsd be, hogy $x * 2 = 2$, $\forall x \in R$.

c) Tudva azt, hogy a "$*$" művelet asszociatív számítsd ki (-2015) $*$ (-2014) $*$ (-2013) $* \dots *$ 2013 $*$ 2014 $*$ 2015 értékét. M: 2

3. Az egész számok Z halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 3$ és $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$ műveleteket.

a) Oldd meg az egész számok halmazán: $x * x = x \circ x$ egyenletet. M: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$

b) Határozd meg az *a* egész számot úgy, hogy az $x \circ a = 3$ egyenlőség minden egész számra legyen igaz. M: $a = 3$

c) Oldd meg az egész számok halmazán : $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ egyenletrendszert. M: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

4. Tekintsük a $G = (2, +\infty)$ halmazt és az $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x, y \in R$ műveletet.

a) Igazold, hogy $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$, $\forall x, y \in R$.

b) Igazold, hogy $x \circ y \in G$, $\forall x, y \in G$.

c) Számítsd ki G invertálható elemeit a „$\circ$ „ műveletre nézve.

5. Az R halmazon értelmezzük az $x * y = xy - 5(x + y) + 30$ műveletet.

a) Bizonyítsd be, hogy $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$, $\forall x, y \in R$.

b) Határozd meg az R halmaz semleges elemét a "$*$„ műveletre nézve. M: e= 6

c) Tudva azt, hogy a "$*$ „ művelet asszociatív oldd meg az $x * x * x = x$ egyenletet.

M: $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$

6. Adott a $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z, a^2 - 2b^2 = 1\}$ halmaz.

a) Ellenőrizd, hogy $3 + 2\sqrt{2} \in G$.

b) Bizonyítsd be, hogy $x \cdot y \in g$, $\forall x,y \in G$.

7. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ és $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$ műveleteket.

a) Ellenőrizd, hogy $(x * y) - (3 \circ x) = -1$, $\forall x \in R$.

b) Számítsd ki $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$, ha e_1 a „$*$" művelet semleges eleme, valamint e_2 a „$\circ$" művelet semleges eleme. M: 1

8. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ műveletet.

a) Igazold, hogy $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y \in R$.

b) Bizonyítsd be, hogy $x \circ (-4) \circ y = -4$, $\forall x, y \in R$

9. Az R halmazon értelmezzük az $x \circ y = x + y + 3$ és $x * y = xy - 3(x + y) + 12$ műveleteket.

a) Igazold, hogy $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, $\forall x, y \in R$.

b) Az R halmazon old meg az $[x \circ (x + 1)] + [x * (x + 1)] = 11$ egyenletet. M: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

c) Oldd meg a valós számok halmazán: $\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases}$ egyenletrendszert.

M: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

2. Fejezet: Polinomok

Polinom helyettesítési értéke.

A polinom algebrai alakjának nevezzük a következő kifejezést $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, ahol az $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ együtthatók egy test elemei és $a_n \neq 0$. A polinom foka n. A polinomnak α-val való helyettesítési értékét megkapjuk, ha az X helyére mindenhova az α értékét helyettesítjük be és elvégezzük a számolásokat.

Például, legyen $f(X) = X^3 - 2X + 3$ egy harmadfokú polinom és legyen $\alpha = 2$, akkor $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$.

Begyakorló példák megoldással

1. Adott az $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ polinom. Számítsd ki az $f\ -1$ értéket.

Megoldás:

Behelyettesítjük az X helyére a -1 értéket:
$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$. Tehát $f(-1) = 0$.

2. Adott az $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Számítsd ki az $f\ 0$ értéket.

Megoldás:

Behelyettesítjük az X helyére a 0 értéket: $f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + m \cdot 0 - 6 = -6$. Tehát $f(0) = -6$.

3. Adott az $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = 2$ számítsd ki az $f\ 1$ értéket.

Megoldás:

Behelyettesítjük az m helyére a 2 értéket, kapjuk az $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 2$ polinomot, majd az X helyére az 1 értéket: $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 - 2 - 2 + 2 = -1$.

4. Adott az $f = X^3 - 2X^2 + 1$ polinom. Igazold, hogy $f\ 1 = 0$.

Megoldás:

Behelyettesítjük az X helyére az 1 értéket: $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

5. Adott az $f = X^3 + X^2 + mX + m$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $f\ 1 = 2 + 2m$.

Megoldás:

Behelyettesítjük az X helyére az 1 értéket: $f(1) = 1^3 + 1^2 + m \cdot 1 + m = 1 + 1 + m + m = 2 + 2m$.

Javasolt példák eredménnyel.

1. Adott az $f = 2X^3 - X^2 + 3$ polinom. Számítsd ki az $f\ -1$ értéket.

Eredmény: $f(-1) = 0$.

2. Adott az $f = X^3 + X^2 + X + 1$ polinom. Számítsd ki az $f \;\; -2$ értéket.

Eredmény: $f(-2) = -5$.

3. Adott az $f = -X^3 + X^2 - X - 2$ polinom. Számítsd ki az $f \;\; -1$ értéket.

Eredmény: $f(-1) = 1$.

4. Adott az $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ polinom. Számítsd ki az $f \;\; 2$ értéket.

Eredmény: $f(2) = 27$.

5. Adott az $f = X^3 + mX^2 + X + 1$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Számítsd ki az $f \;\; 0$ értéket.

Eredmény: $f(0) = 1$.

6. Adott az $f = X^3 - 3X^2 - 3X + m$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = 1$ számítsd ki az $f \;\; 1$ értéket.

Eredmény: $f(1) = -4$.

7. Adott az $f = X^3 + 6X^2 + X - 8$ polinom. Igazold, hogy $f \;\; 1 \; = 0$.

Eredmény: $f \;\; 1 \; = 0$.

8. Adott az $f = -2X^3 + mX + 7$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = 2$ igazold, hogy $f \;\; 1 \; = 7$ értéket.

Eredmény: $f \;\; 1 \; = 7$.

9. Adott az $f = 2X^3 - X^2 + 3$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $f \;\; 1 \; = 2 - 2m$.

Eredmény: $f \;\; 1 \; = 2 - 2m$.

10. Adott az $f = mX^3 + X + 4$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $f \;\; -1 \; = -m + 3$.

Eredmény: $f \;\; -1 \; = -m + 3$.

Polinomok X– a-val való osztása, Horner séma

A polinomnak az X– a-val való osztását több módszerrel is elvégezhetjük, itt a Horner sémát mutatjuk be. Ennek érdekében elkészítjük a következő háromsoros táblázatot:

Horner séma

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	$\cdots$	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
α	a_n	$a_{n-1} + \alpha \cdot a_n = b_n$	$a_{n-2} + \alpha \cdot b_n = b_{n-1}$	$\cdots$	$f(\alpha)$

Magyarázat: az első sorba a X hatványai kerülnek csökkenő sorrendbe, a második sorba pedig az együtthatói. A harmadik sorban már számolások találhatóak: sor α utáni első eleme a főegyüttható a_n lesz, majd a következő tagokat úgy képezzük, hogy az előző kiszámolt tagot megszorozzuk α-val majd hozzáadjuk a soron következő együtthatót. A kiszámolt tagokat itt sorra $b_n, b_{n-1}, \ldots$-vel jelöltük. Az utolsó oszlopban pont a behelyettesítési értéket kapjuk meg, ami megegyezik az osztási maradékkal. A hányados polinom pedig $h(x) = a_n X^{n-1} + b_n X^{n-2} + \ldots + b_1$, azaz leolvasható a Horner séma alsó sorából: egyel csökkentjük az X hatványait és megszorozzuk a kiszámolt értékekkel.

Begyakorló példák megoldással

1. Adott az $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás:

Alkalmazzuk a Horner sémát:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	-4	1	2
1	1	$-4+1\cdot 1=-3$	$1+1\cdot\ -3\ =-2$	$2+1\cdot\ -2\ =0$

Innen leolvassuk a hányados polinomot: $h(X) = X^2 - 3X - 2$, illetve a maradékot: 0.

2. Adott az $f = X^3 - 2X^2 + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 2$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás:

Alkalmazzuk a Horner sémát:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	-2	0	1
2	1	$-2+2\cdot 1=0$	$0+2\cdot 0=0$	$1+2\cdot 0=1$

Innen leolvassuk a hányados polinomot: $h(X) = X^2$, illetve a maradékot: 1.

3. Adott az $f = -2X^3 - X^2 + X - 2$ polinom. Határozd meg az f polinom $X + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás:

Az osztó polinom $X + 1$, azaz $X - (-1)$, tehát α értéke -1.

Alkalmazzuk a Horner sémát:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	-2	-1	1	-2
-1	-2	$-1+(-1)\cdot(-2)=1$	$1+(-1)\cdot 1=0$	$-2+(-1)\cdot 0=-2$

Innen leolvassuk a hányados polinomot: $h(X) = -2X^2 + X$, illetve a maradékot: -2.

4. Adott az $f = X^3 + X^2 + X + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 3$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás:

Alkalmazzuk a Horner sémát:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	1	1	1
3	1	$1+3\cdot 1=4$	$1+3\cdot 4=13$	$1+3\cdot 13=40$

Innen leolvassuk a hányados polinomot: $h(X) = X^2 + 4X + 13$, illetve a maradékot: 40.

5. Adott az $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = 0$ határozd meg az f polinom $X - 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás:

Ha $m = 0$ akkor a polinom $f = X^3 + 1$ lesz. Alkalmazzuk a Horner sémát:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	0	0	1
1	1	$0+1\cdot 1=1$	$0+1\cdot 1=1$	$1+1\cdot 1=2$

Innen leolvassuk a hányados polinomot: $h(X) = X^2 + X + 1$, illetve a maradékot: 2.

Javasolt példák eredménnyel.

1. Adott az $f = X^3 + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = X^2 + X + 1$, maradék 2.

2. Adott az $f = -2X^3 - X^2 - X - 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = -2X^2 + X - 2$, maradék 3.

3. Adott az $f = -X^3 + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = -X^2 + X - 1$, maradék 2.

4. Adott az $f = -X^3 + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = -X^2 - X - 1$, maradék 0.

5. Adott az $f = X^3 + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = X^2 - X + 1$, maradék 0.

6. Adott az $f = 2X^3 + X + 1$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 3$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = 2X^2 + 6X + 19$, maradék 58.

7. Adott az $f = X^3 - 27$ polinom. Határozd meg az f polinom $X - 3$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = X^2 + 3X + 9$, maradék 0.

8. Adott az $f = mX^3 + mX - 3$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = 1$ határozd meg az f polinom $X - 2$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = X^2 + X + 2$, maradék -1.

9. Adott az $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = 3$ határozd meg az f polinom $X + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = X^2 + 2X + 1$, maradék 0.

10. Adott az $f = X^3 - 8$ polinom. ahol $m \in \mathbb{R}$. Határozd meg az f polinom $X - 2$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Eredmény: $h(X) = X^2 + 2X + 4$, maradék 0.

Polinomok oszthatósága, Bézout tétele

Egy polinom akkor osztható egy másik polinommal, ha az osztási maradék 0.

Bézout tétele: egy polinom akkor és csak akkor osztható az X– a polinommal, ha $f(a) = 0$.

Begyakorló példák megoldással

1. Adott az $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X - 1$ polinommal.

Megoldás:

Alkalmazzuk Bézout tételét: mivel $a = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 1 - 4 + 1 + 2 = 0$, tehát az f polinom osztható az $X - 1$ polinommal.

2. Adott az $f = X^3 + 8$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X + 2$ polinommal.

Megoldás:

Alkalmazzuk Bézout tételét: mivel $a = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$, tehát az f polinom osztható az $X + 2$ polinommal.

3. Adott az $f = X^3 + X + m$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Ha $m = -2$ igazold, hogy az f polinom osztható az $X - 1$ polinommal.

Megoldás:

Ha $m = -2$ akkor a polinom a következő: $f = X^3 + X - 2$.

Alkalmazzuk Bézout tételét: mivel $a = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1 \cdot 1^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$, tehát az f polinom osztható az $X - 1$ polinommal.

4. Adott az $f = X^3 + mX^2 + X + 2$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Határozd meg az m értékét úgy, hogy az f polinom osztható legyen az $X - 1$ polinommal.

Megoldás:

Alkalmazzuk Bézout tételét: mivel $a=1 \Rightarrow f(1)=1^3+m\cdot 1^2+1+2=1+m+1+2=m+4$, az f polinom akkor lesz osztható az $X-1$ polinommal, ha $f(1)=0$, azaz $m+4=0 \Rightarrow m=-4$.

5. Adott az $f=X^3+mX^2+mX+1$ polinom, ahol $m\in\mathbb{R}$. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X+1$ polinommal, az m valós szám bármilyen értékére.

Megoldás:

Alkalmazzuk Bézout tételét: mivel $a=-1$
$\Rightarrow f(-1)=(-1)^3+m\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+1=-1+m-m+1=0$, tehát az f polinom osztható az $X+1$ polinommal, az m valós szám bármilyen értékére.

Javasolt példák eredménnyel.

1. Adott az $f=X^3+4X^2-2X-3$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X-1$ polinommal.

Eredmény: $f(1)=0.$

2. Adott az $f=X^3-27$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X-3$ polinommal.

Eredmény: $f(3)=0.$

3. Adott az $f=-X^3+2X^2-3$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X+1$ polinommal.

Eredmény: $f(-1)=0.$

4. Adott az $f=-2X^3+X^2+16X-4$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X-2$ polinommal.

Eredmény: $f(2)=0.$

5. Adott az $f=X^3+X-2$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X-1$ polinommal.

Eredmény: $f(1)=0.$

6. Adott az $f=8X^3+4X^2+2X-3$ polinom. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X-\frac{1}{2}$ polinommal.

Eredmény: $f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$

7. Adott az $f=-X^3+mX^2+X-2$ polinom, ahol $m\in\mathbb{R}$. Határozd meg az m értékét úgy, hogy az f polinom osztható legyen az $X+2$ polinommal.

Eredmény: $m=-1$

8. Adott az az $f=X^3+mX+27$ polinom, ahol $m\in\mathbb{R}$. Határozd meg az m értékét úgy, hogy az f polinom osztható legyen az $X-3$ polinommal.

Eredmény: $m=18$

9. Adott az $f=-X^3+mX^2-2mX+8$ polinom, ahol $m\in\mathbb{R}$. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X-2$ polinommal, az m valós szám bármilyen értékére.

Eredmény: $f(2)=0.$

10. Adott az $f = mX^3 + mX^2 + mX - 3$ polinom, ahol $m \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy az f polinom osztható az $X - 1$ polinommal, az m valós szám bármilyen értékére.

Eredmény: $f(1) = 0$.

Polinomok gyökei, Viète összefüggések

Legyen $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0,\ ahol\ a \neq 0$ egy harmadfokú egyenlet, melynek gyökeit jelöljük a következőképpen x_1, x_2, x_3. Ha bármelyiket visszahelyettesítjük az egyenletbe 0 értéket kapunk.

Igazak a Viète összefüggések:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

, látható, hogy vettük a gyököket egyesével, kettesével és hármasával (ebből értelemszerűen csak egy van) és összeadtuk. Ezek eredményét megkapjuk úgy, hogy sorra elosztjuk a $b, c\ és\ d$ értékeit az a értékével, közben változtatva az előjelet is.

Érdemes megjegyezni a következő összefüggést is, ami a Viète összefüggésekből következik:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}.$$

Begyakorló példák megoldással

1. Adott az $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

Megoldás:

Felírjuk a Viète összefüggéseket:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

mivel $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1$

Ezekből: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \ -3\ ^2 - 2\cdot 3 = 9 - 6 = 3$ következik.

2. Adott az $f = X^3 - 2X^2 + 1$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Számítsd ki az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kifejezés értékét.

Megoldás:

Felírjuk a Viète összefüggéseket:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

mivel $a = 1, b = -2, c = 0, d = 1$

Ezekből: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\ 2\ ^2-2\cdot 0=4$ következik.

3. Adott az $f=X^3-2X^2+1$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Számítsd ki az $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3$ kifejezés értékét.

Megoldás:
Felírjuk a Viète összefüggéseket:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases} \quad \text{mivel } a=1,b=-2,c=0,d=1$$

Számítsuk ki először a $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3$ kifejezést:

$$2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3\ =\ 4-2x_1-2x_2+x_1x_2\quad 2-x_3\ =8-4x_1-4x_2+2x_1x_2-4x_3+2x_1x_3+2x_2x_3-x_1x_2x_3=$$
$$=-4\ \ x_1+x_2+x_3\ \ +2\ \ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\ \ -x_1x_2x_3+8=-4\cdot 2+2\cdot 0-(-1)+8=-8+1+8=1$$

Tehát $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3\ =1.$

4. Adott az $f=X^3-6X^2+mX-6$ polinom, ahol $m\in\mathbb{R}$ Igazold, hogy $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_3x_1}=1.$

Megoldás:
Felírjuk a Viète összefüggéseket:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m \\ x_1x_2x_3=6 \end{cases} \quad \text{mivel } a=1,b=-6,c=m,d=-6$$

Alakítsuk át először a $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_3x_1}$ kifejezést. Észrevesszük, hogy a közös nevező $x_1x_2x_3$.

Megfelelő értékekkel bővítve a törteket kapjuk, hogy:

$\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_3x_1}=\dfrac{x_3}{x_1x_2x_3}+\dfrac{x_1}{x_1x_2x_3}+\dfrac{x_2}{x_1x_2x_3}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\dfrac{6}{6}=1$. Megjegyzés: látható, hogy a második Viète összefüggést nem kellett használnunk.

5. Adott az $f=X^3-4X^2+X+2$ polinom. Igazold, hogy $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=-\dfrac{1}{2}$.

Megoldás:
Felírjuk a Viète összefüggéseket:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \\ x_1x_2x_3=-2 \end{cases} \quad \text{mivel } a=1,b=-4,c=1,d=2$$

Alakítsuk át először a $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$ kifejezést:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3}{x_1x_2x_3}+\frac{x_1x_3}{x_1x_2x_3}+\frac{x_1x_2}{x_1x_2x_3}=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Javasolt példák eredménnyel.

1. Adott az $f=X^3+1$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Igazold, hogy $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$, innen $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.

2. Adott az $f=X^3+X^2+X+1$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Igazold, hogy $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$, innen $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$.

3. Adott az $f=X^3+X^2+X+m$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Igazold, hogy $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \\ x_1x_2x_3=-m \end{cases}$, innen $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$.

4. Adott az $f=X^3+1$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Számítsd ki az $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3$ kifejezés értékét.

Eredmény: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$, innen $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3\quad =9$.

5. Adott az $f=2X^3+X+1$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Számítsd ki az $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3$ kifejezés értékét.

Eredmény: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$, innen $2-x_1\quad 2-x_2\quad 2-x_3\quad =\dfrac{17}{2}$.

6. Adott az $f=X^3+1$ polinom, amelynek gyökei $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Igazold, hogy $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_3x_1}=0$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$, innen $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\dfrac{1}{x_3x_1}=0$.

7. Adott az $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -2$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$, innen $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -2$.

8. Adott az $f = X^3 + 1$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$, innen $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$.

9. Adott az $f = -3X^3 + 3X^2 - X + 7$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{7}$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{3} \\ x_1x_2x_3 = \frac{7}{3} \end{cases}$, innen $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{7}$.

10. Adott az $f = -X^3 + 2X + 1$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Igazold, hogy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -2$.

Eredmény: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$, innen $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -2$.

3. Fejezet: Elemi primitívek, határozott integrálok.

Elemi primitívek

Értelmezés:

Ha adott egy $f: I \to \mathbb{R}$ függvény, akkor a $F: I \to \mathbb{R}$ -et az f egy primitív függvényének nevezzük, ha F deriválható és $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$. Ha egy f függvénynek létezik egy npimitív függvény, akkor azt mondjuk, hogy primitiválható. Ilyenkor végtelen sok primitív létezik, amelyek csak egy konstans tagban különböznek.

Egy primitiválható függvény összes primitív függvényének halmazát $\int f(x)\,dx$-el jelöljük, és az f határozatlan integráljának nevezzük. Ha ismerjük legalább az egyik primitív függvényét, akkor a következőképpen kapjuk meg az összest: $\int f(x)\,dx = F + c$ ahol $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans szám. A c minden behelyettesítési értékére kapunk egy primitív függvényt.

Képletek.

A leggyakoribb elemi határozatlan integrálok képletei:

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$ pl: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c,$ $\int 1\,dx = x + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$ pl: $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$, $\int e^x\,dx = \frac{e^x}{\ln e} + c = e^x + c$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$

Integrálási szabályok:

a) $\int f(x)\,dx = \int f(x)\,dx + c$ Ha egy konstanst hozzáadunk, nem változik a primitív függvénycsalád.
b) $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$ egy konstans szorzótényezőt kiemelhetünk az integrál elé
c) $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ Az összeg integrálja egyenlő az integrálok összegével.

Határozott integrálok.

Ha adott egy $f: I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $F: I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye, akkor:

$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(x)}\Big|_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$ az f határozott integráljának nevezzük, a-tól b-ig.

Tulajdonságok

a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx$ Linearitás
b) $\forall c \in I, \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ Aditivitás
c) $\exists c \in (a, b)$ úgy,hogy $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$

d) Ha $f \geq 0$ az $[a, b]$-n , akkor $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ Pozitivitás

e) Ha $f \leq g$ az $[a, b]$ –n, akkor $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ Monotónia

Alkalmazások:

Legyenek f és $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ két függvény. Úgy, hogy $g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$, akkor ezen az $[a, b]$ intervallumon a grafikonjaik által közrezárt síkidom területét az $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$ határozott integrál adja meg.

Ha csak egyszerűen az $f(x)$ pozitív függvény grafikonja alatti terület kell az $[a, b]$ intervallumon, akkor ez a terület: $\int_a^b f(x)\,dx$

Megoldott feladatok:

1. Adott az $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ Számítsd ki az $\int f(x) \cdot (x + 2)\,dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: x $\int f(x)(x+2)\,dx = \int \frac{x^2}{(x+2)} \cdot (x+2)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

2. Adott két függvény: $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+4}{x}$ $g(x) = \ln(x+4)$.

Számítsd ki az $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx$ integrált.

Megoldás: $g'(x) = (\ln(x+4))' = \frac{1}{x+4}$

Tehát $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \int \frac{x+4}{x} \cdot \frac{1}{x+4} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$

3. Számítsd ki: $\int_1^2 (x^2 + 2x - 3)\,dx$ -et

Megoldás: $\int_1^2 (x^2 + 2x - 3)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx + \int_1^2 2x\,dx - \int_1^2 3\,dx$=

$=\int_1^2 x^2\,dx + 2 \cdot \int_1^2 x\,dx - 3 \cdot \int_1^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - 3 \cdot x|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - 3(2-1)$
$= \frac{8-1}{3} + 2 \cdot \frac{4-1}{2} - 3 \cdot 1 = \frac{7}{3} + 3 - 3 = \frac{7}{3}$

4. Számítsd ki az $[1,2]$ intervallumon az $f(x) = 3x^2$ függvény grafikonja alatti területet.

Megoldás: A terület = $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 3x^2\,dx = 3 \cdot \int_1^2 x^2\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right) = 3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$

5. Számítsd ki a $[0, \pi]$ intervallumon az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja alatti rész területét.

Megoldás: A terület= $\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)|_0^\pi = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = -(-1-1) = -(-2) = 2$