PĂCURAR CORNEL COSMIN

MATEMATICĂ
PENTRU EXAMENUL
DE BACALAUREAT

Profil : mate-info

2023

Subiectul I (prelucrări bacalaureat)

1.Arătaţi că suma elementelor mulţimii A=$\{n\in\mathbb{N}|n-3\le 2\}$ este egală cu 15.
2.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu 4.
3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+7}=\sqrt{1-x}$.
4.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel puţin 7 elemente ale unei mulţimi cu exact 10 elemente.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$,$B(2,-2)$ şi $C(10,8)$.Determinaţi lungimea segmentului AD, unde punctul D este mijlocul segmentului BC.
6.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2023\pi=0$.
7.Arătaţi că suma elementelor mulţimii A=$\{n\in\mathbb{N}|n+1\le 6\}$ este egală cu 15.
8.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+m$, unde m este număr real.Determinaţi numărul real m, ştiind că vârful parabolei asociate funcţiei f are ordonata egală cu 4.
9.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+5}=\sqrt{7-x}$.
10.Determinaţi numărul submulţimilor cu cel puţin 9 elemente ale unei mulţimi cu exact 11 elemente.
11.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$,$B(-1,3)$ şi $C(7,9)$.Determinaţi lungimea segmentului BD, unde punctul D este mijlocul segmentului AC.
12.Arătaţi că $1+\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+...+\cos2017\pi=0$.
13.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, ştiind că $b_1=1$ şi $b_2=4$.
14.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx+9=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.
15.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+3)+\log_2(x-3)=4$.
16.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
17.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(2,4)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\vec{AM}=\vec{MB}$.
18.Se consideră triunghiul ABC cu AB=2 , AC=$6\sqrt{3}$ şi A=$\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 9.
19.Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, ştiind că $b_1=1$ şi $b_2=5$.
20.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+mx+9=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.
21.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$.
22.Determinaţi câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.
23.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,8)$ şi $B(8,2)$.Determinaţi coordonatele punctului M,ştiind că $\vec{AM}=\vec{MB}$.
24.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$3\sqrt{3}$, AC=6 şi A=$\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu 18.
25.Arătaţi că numărul n=$(5-i\sqrt{3})(5+i\sqrt{3})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
26.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,5)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+a$.

27.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2021^x+2021^{-x}=2$.
28.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară.
29.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-4)$ şi$B(3,-3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
30.Arătaţi că $\sin(a+b)\sin(a-b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.
31.Arătaţi că numărul n=$(3-i\sqrt{5})(3+i\sqrt{5})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
32.Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-a$.
33.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2022^x+2022^{-x}=2$.
34.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor impară.
35.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ şi$B(5,-5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe AB.
36.Arătaţi că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)$, pentru orice numere reale a şi b.
37.Se consideră numărele complexe $z_1=3-i$ şi $z_2=7-3i$.Arătaţi că $3z_1-z_2=2$.
38.Derminaţi numerul real a pentru care $f(a)+f(a+2)=24$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$.
39.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot9^x-9^{x+1}+63=0$.
40.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+1)\le 56$.
41.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,9)$,$B(7,1)$ şi $C(6,m)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\vec{AC}=\vec{CB}$.
42.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AB=3 şi aria triunghiului ABC este egală cu 6.
43.Se consideră numărele complexe $z_1=3-i$ şi $z_2=8-2i$.Arătaţi că $2z_1-z_2=-2$.
44.Derminaţi numerul real a pentru care $f(a)+f(a+3)=35$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$.
45.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot4^x-4^{x+1}+32=0$.
46.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relaţia $n(n+1)\ge 20$.
47.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,3)$,$B(-1,5)$ şi $C(m,4)$.Determinaţi numărul real m, ştiind că $\vec{AC}=\vec{CB}$.
48.Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, ştiind că AC=6 şi aria triunghiului ABC este egală cu 24.
49.Determinaţi elementele mulţimii M=$\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{6}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.
50.Se consideră x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-mx+2=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=\frac{3}{2}$.
51.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{12-x}-x=0$.
52.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea A=$\{\log_4 n\,|n\in\mathbb{N}^*, n\le 70\}$, acesta să fie număr natural
53.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,4)$ şi $P(4,2)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MP.
54.Se consideră triunghiul ABC cu AC=$6\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ şi $m(\sphericalangle B)=30^\circ$.Determinaţi lungimea laturii BC.

55.Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid \frac{7}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.
56.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-mx+4=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=\frac{15}{4}$.
57.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{20-x}-x=0$.
58.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{\log_2 n \mid n\in\mathbb{N}^*, n\leq 70\}$, acesta să fie număr natural
59.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(4,4)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP.
60.Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45°$ și $m(\sphericalangle C)=30°$.Determinați lungimea laturii BC.
61.Calculați modulul numărului complex $z=(3+i)(2-3i)-2(1-i)$.
62.Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m-3)x+m(m+1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
63.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5\log_5 x-\log_x 5=4$.
64.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 46 submulțimi cu cel mult două elemente.
65.Se consideră triunghiului ABC ,punctul M mijlocul laturii AC și punctul N mijlocul segmentului BM. Demonstrați că $2\vec{BN}-\vec{NA}-\vec{NC}=\vec{0}$.
66.Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $3+7\cos x=\cos 2x$.
67.Calculați modulul numărului complex $z=(3-i)(2+3i)-2(1+i)$.
68.Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+3)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
69.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6\log_6 x-\log_x 6=5$.
70.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 37 submulțimi cu cel mult două elemente.
71.Se consideră triunghiului ABC ,punctul M mijlocul laturii AB și punctul N mijlocul segmentului CM.Demonstrați că $2\vec{CN}+\vec{BN}+\vec{AN}=\vec{0}$.
72.Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $4+9\cos x=\cos 2x$.
73.Arătați că numărul $n=|1-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|$ este natural.
74.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-9x$.Rezolvați înmulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\leq g(x)$.
75.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}\cdot 2^x=108$.
76.Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
77.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$,$B(1,2)$ și $C(1,4)$.Calculați aria triunghiului ABC.
78.Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, știind că $BC=4$,$B=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{\pi}{3}$.
79.Arătați că numărul $n=|1-\sqrt{6}|+|3-\sqrt{6}|$ este natural.
80.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=13-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-13x$.Rezolvați înmulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\geq g(x)$.
81.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x\cdot 2^{x+2}=144$.
82.Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma folosind doar cifre pare.

83.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-2)$,$B(3,1)$ și $C(6,1)$.Calculați aria triunghiului ABC.
84.Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, știind că $AC=4$,$A=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.
85.Determinați numărul complex z, știind că $2\bar{z}-z=2+9i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
86.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real.Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.
87.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{\lg x}{\lg(3x-2)}=\frac{1}{2}$.
88.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele distincte două câte două și impare.
89.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-3,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+4$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.
90.Arătați că $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.
91.Determinați numărul complex z, știind că $3\bar{z}-z=6-8i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
92.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+9$, unde m este număr real.Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.
93.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{\lg x}{\lg(3x+4)}=\frac{1}{2}$.
94.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele distincte două câte două și pare.
95.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,3)$ și dreapta d de ecuație $y=x+3$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.
96.Arătați că $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$, pentru orice număr real x.
97.Se consideră numărul complex $z=3-2i$.Arătați că $z^2-6z+13=0$.
98.Derminați numerele reale a și b,pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.
99.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(6x+7)=1+\log_5(x+4)$.
100.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele pare.
101.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$,$B(4,2)$ și $C(1,6)$.Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.
102.Calculați aria paralelogramului ABCD, știind că $AB=6$,$AC=12$ și $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.
103.Se consideră numărul complex $z=2-3i$.Arătați că $z^2-4z+13=0$.
104.Derminați numerele reale a și b,pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+4$ se intersectează în punctul $M(3,12)$.
105.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x+8)=1+\log_6(x+5)$.
106.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele impare.
107.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$,$B(5,2)$ și $C(4,6)$.Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B .
108.Calculați aria paralelogramului ABCD, știind că $AB=10$,$AC=12$ și $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.
109.Arătați că numărul $n=\log_6(\sqrt{15}-3)+\log_6(\sqrt{15}+3)$ este natural.
110.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+8x+10$.

111.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+5)^3 = (5-x)^3$.
112.Calculați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii {0,2,4,5,6}.
113.Punctele M,N și P verifică relația $2\overrightarrow{MN} + 7\overrightarrow{NP} = \vec{0}$.Calculați lungimea segmentului MP,știind că MN=3.
114.Arătați că $\sin x + \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(2\pi - x) = 0$, pentru orice număr real.
115.Arătați că numărul $n = \log_4(\sqrt{13}+3) + \log_4(\sqrt{13}-3)$ este natural.
116.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=x^2+7x+3$.
117.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+6)^3 = (6-x)^3$.
118.Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii {0,1,5,3,7}.
119.Punctele M,N și P verifică relația $3\overrightarrow{MN} + 8\overrightarrow{NP} = \vec{0}$.Calculați lungimea segmentului MP,știind că MN=5.
120.Arătați că $\sin(2\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(2\pi + x) = 0$, pentru orice număr real.
121.Calculați partea întreagă a numărului real $a = \sqrt[3]{27} + \sqrt{10}$.
122.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$,unde m este număr real.Determinați numărul real m, știind că$(f \circ f)(x) = f(x+3)$, pentru orice număr real x.
123.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{3}{5}\right)^{4x+1} \le \left(\frac{3}{5}\right)^{5x+3}$.
124.Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin două elemente ale mulțimii A={0,1,2, …,9}.
125.Se consideră triunghiului MNP cu MN=6,MP=8 și $m(\sphericalangle M) = 90°$.Calculați lungimea vectorului $\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.
126.Determinați numărul real x, știind că tgx+ctgx−2=0 și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
127.Calculați partea întreagă a numărului real $a = \sqrt[3]{216} + \sqrt{7}$.
128.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$,unde m este număr real.Determinați numărul real m, știind că$(f \circ f)(x) = f(x-2)$, pentru orice număr real x.
129.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{4}{5}\right)^{6x+2} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{5x+6}$.
130.Determinați numărul de submulțimi cu cel mult patru elemente ale mulțimii A={0,1,2, …,9}.
131.Se consideră triunghiului MNP cu MN=12,MP=16 și $m(\sphericalangle M) = 90°$.Calculați lungimea vectorului $\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.
132.Determinați numărul real x, știind că ctgx+tgx−2=0 și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.
133.Arătați că $(5-3i)^2 + (5+3i)^2 = 32$,unde $i^2 = -1$.
134.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 - 8x + 15$.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
135.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x-2} = x+2$.
136.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 7.
137.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,1) și B(2,3).Determinați coordonatele punctului M,știind că punctul A este mijlocul segmentului BM.
138.Calculați aria paralelogramului ABCD, știind că AB=6,BC=3 și $m(\sphericalangle BAD) = 30°$.
139.Arătați că $(6-5i)^2 + (6+5i)^2 = 22$,unde $i^2 = -1$.

140.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^2 + 6x + 8$.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
141.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-3x-4} = x-4$.
142.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 12.
143.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,0) și B(1,2).Determinați coordonatele punctului M,știind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
144.Calculați aria paralelogramului ABCD, știind că AB=6,BC=$3\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle ABC) = 45°$.
145.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2-3i$ și $z_2 = 1-2i$.Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.
146.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
147.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(x+6) + \log_8(x-6) = 2$.
148.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 5.
149.Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
150.Arătați că $\sin 2x + (\sin x - \cos x)^2 = 1$,pentru orice număr real x.
151.Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+4i$ și $z_2 = 1+3i$.Arătați că $3z_1 - 4z_2 = 2$.
152.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 5mx + 3 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 2 = 0$.
153.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{12}(x+3) + \log_{12}(x-3) = 2$.
154.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
155.Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.
156.Arătați că $\sin 2x - (\sin x + \cos x)^2 = -1$,pentru orice număr real x.
157.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5-2i$ și $z_2 = 3+3i$.Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.
158.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = -x+1$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = x^2 + x + 2$.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
159.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3} = 3 \cdot 3^{-3x}$.
160.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
161.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,0),B(4,2) și C(0, m),unde m este număr real.Determinați numărul real m,știind că punctele A,B și C sunt coliniare.
162.Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC,știind că AB=8,AC=4 și A= $\frac{\pi}{3}$.
163.Se consideră numerele complexe $z_1 = 6+3i$ și $z_2 = 5+4i$.Arătați că $4z_1 - 3z_2 = 9$.
164.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x+1$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g(x) = x^2 - 3x + 5$.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
165.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+4} = 3 \cdot 3^{4x}$.
166.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.
167.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,2),B(2,4) și C(m, 3),unde m este număr real.Determinați numărul real m,știind că punctele A,B și C sunt coliniare.
168.Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC,știind că AB=$4\sqrt{3}$,BC=8 și B= $\frac{\pi}{6}$.
169.Se consideră numărul complex z=3+i.Arătați că $z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 16$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
170.Determinați numărul real m,știind că punctul A(2, m) aparține graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x)=x^2+3x-4$.
171.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1-\log_3 x)(2-\log_3 x)=0$.
172.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra unităților strict mai mică decât cifra zecilor.
173.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(1,4)$ și $C(0,3)$.Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
174.Arătați că $(1+ctg^2x)\sin^2x-(1+tg^2x)\cos^2x=0$,pentru orice $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
175.Se consideră numărul complex $z=2-i$.Arătați că $z\bar{z}+\bar{z}z=9$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
176.Determinați numărul real m,știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+3$.
177.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1-\log_2 x)(3-\log_2 x)=0$.
178.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifra zecilor mai mică sau egală decât cifra unităților.
179.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(1,5)$.Determinați lungimea medianei din A a triunghiului ABC.
180.Arătați că $(1-tg^2x)\cos^2x+(1-ctg^2x)\sin^2x=0$,pentru orice $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
181.Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-6,6)$.
182.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},f(x)=x^2-4$.Calculați $(f\circ f)(2)$.
183.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+2}=x-3$.
184.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$,acesta să fie multiplu de 22.
185.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,3)$ și $N(5,3)$.Determinați coordonatele punctului P,situat pe axa Ox,astfel încât PM=PN.
186.Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $BC=6\sqrt{2}$ și $A=\frac{\pi}{4}$.
187.Calculați suma numerelor întregi din intervalul $[-5,5]$.
188.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},f(x)=x^2-1$.Calculați $(f\circ f)(-1)$.
189.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+4}=x-2$.
190.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$,acesta să fie multiplu de 12.
191.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(2,4)$.Determinați coordonatele punctului P,situat pe axa Oy,astfel încât PM=PN.
192.Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $AC=6\sqrt{3}$ și $B=\frac{\pi}{3}$.
193.Se consideră numerele complexe $z_1=2-3i$ și $z_2=4+6i$.Arătați că numărul $z_1z_2+2z_1+z_2$ este real.
194.Calculați $(f\circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},g(x)=x^2-x+1$.
195.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-16)=\log_3(6x-21)$.
196.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 9.
197.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=5x+2017$ și punctul $A(3,2)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
198.Arătați că $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x=0$,pentru orice număr real x.
199.Se consideră numerele complexe $z_1=3+2i$ și $z_2=9-6i$.Arătați că numărul $z_1z_2+3z_1+z_2$ este real.

200.Calculați $(f\circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},f(x)=3x-4$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},g(x)=x^2+5x+2$.
201.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+9)=\log_4(5x+5)$.
202.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 6.
203.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=-2x+2017$ și punctul $A(1,2)$.Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
204.Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x=1$,pentru orice număr real x.
205.Arătați că $\frac{3+i}{3-i}+\frac{3-i}{3+i}=\frac{8}{5}$,unde $i^2=-1$.
206.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m-3)x+m^2-3m+2=0$.Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$,pentru orice număr real m.
207.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-8}=4-x$.
208.Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.
209.Se consideră triunghiului ABC și punctele M,N și P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstrați că $\vec{AM}+\vec{AP}=\vec{AN}$.
210.Determinați numerele reale x,știind că $\sin 2x=\sqrt{3}\cos x$ și $x\epsilon\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.
211.Arătați că $\frac{4+i}{4-i}+\frac{4-i}{4+i}=\frac{30}{17}$,unde $i^2=-1$.
212.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+5)x+m^2+5m+4=0$.Arătați că $(x_1-x_2)^2=9$,pentru orice număr real m.
213.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-4}=6-x$.
214.Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre divizibile cu 2.
215.Se consideră triunghiului ABC și punctele M,N și P,mijloacele laturilor AB,BC,respectiv AC. Demonstrați că $\vec{MN}+\vec{MP}=\vec{MC}$.
216.Determinați numerele reale x,știind că $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$ și $x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
217.Se consideră numărul complex $z=3-i$.Calculați $\bar{z}\cdot z-z-\bar{z}$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
218.Determinați numărul real m,știind că axa Ox este tangentă graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+3)x+m^2-m+4$.
219.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4\log_x 6+\log_6(6x)=6$.
220.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie multiplu de 13.
221.Se consideră triunghiul ABC,punctul M mijlocul laturii AB și punctul N mijlocul medianei CM.Demonstrați că $\vec{AN}=-\frac{3}{4}\vec{CA}+\frac{1}{4}\vec{CB}$.
222.Arătați că,dacă $(\sin x-3\cos y)^2+(\cos x+3\sin y)^2=10$ și $x,y\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,atunci x=y.
223.Se consideră numărul complex $z=4+i$.Calculați $\bar{z}\cdot z-z-\bar{z}$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
224.Determinați numărul real m,știind că axa Ox este tangentă graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m-1)x+m^2+m+2$.
225.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_x 4+\log_4(4x)=4$.
226.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie multiplu de 12.
227.Se consideră triunghiul ABC,punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM. Demonstrați că $\vec{CN}=-\frac{3}{4}\vec{AC}+\frac{1}{4}\vec{AB}$.

228.Arătați că,dacă $(\sin x + 4\cos y)^2 + (\cos x - 4\sin y)^2 = 17$ și $x,y\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,atunci x=y.
229.Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,știind că $a_1 = 2020$ și rația r=−2.
230.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(-1,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4m$.
231.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6} = 8^{3x-4}$.
232.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să nu conțină cifra 4.
233.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$ și $B(-4,5)$.Determinați ecuația dreptei AB.
234.Dacă $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{2}{3}$,arătați că $\sin 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$.
235.Determinați al cincelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,știind că $a_1 = 2018$ și rația r=1.
236.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(-2,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x) = 2x - m$.
237.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{4x-6} = 27^{5x-8}$.
238.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,40}, acesta să conțină cifra 3.
239.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ și $B(3,4)$.Determinați ecuația dreptei AB.
240.Dacă $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{2}{5}$,arătați că $\sin 2x = \frac{4\sqrt{21}}{25}$.
241. Determinați numărul real a,știind că numerele 25,1021 și a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
242.Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + m$ este tangentă axei Ox.
243.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+3} = 27$.
244.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{64}\}$,acesta să fie număr rațional.
245.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$,$B(2,-1)$ și $C(2,-3)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC.
246.Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle B) = 45°$ și AC=$3\sqrt{2}$.
247. Determinați numărul real a,știind că numerele 4,1010 și a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
248.Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x) = x^2 - 6x + m$ este tangentă axei Ox.
249.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 16$.
250.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{81}\}$,acesta să fie număr rațional.
251.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$,$B(3,-2)$ și $C(-3,4)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC.
252.Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle C) = 30°$ și AB=4.
253. Determinați numărul real a,știind că numerele 5,1012 și a sunt în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

254.Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x) = x^2 + 8x + m$ este tangentă axei Ox.
255.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-4} = 32$.
256.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea A=$\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{20}\}$,acesta să fie număr rațional.
257.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$,$B(-3,2)$ și $C(3,-4)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC.
258.Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC,în care $m(\sphericalangle A) = 60°$ și BC=$4\sqrt{3}$.
259.Arătați că $\left(\sqrt{5} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{5} + 3\right)^2 = 28$.
260.Caculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x) = 3x + 3$.
261.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 - 9x + 9) = \log_4 1$.
262.Determinați câte numere naturale pare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 5,6,8 și 9.
263.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-3)$ și $B(2,1)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.
264.Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0$,pentru orice număr real x.
265.Arătați că $\left(\sqrt{3} + 3\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 3\right)^2 = 24$.
266.Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x) = 2x - 2$.
267.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 + 7x + 10) = \log_5 4$.
268.Determinați câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 4,2,3 și 6.
269.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$ și $B(1,3)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.
270.Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$,pentru orice număr real x.
271.Determinați al cincelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 3$.
272.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(2,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$.
273.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{x-2} = 2^{2-x}$.
274.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mare sau egal cu 30.
275.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4,2)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu −1.
276.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=10,AC=10 și BC=12.Arătați că $\sin C = \frac{4}{5}$.
277.Determinați al șaselea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 4$.
278.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(3,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$.
279.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $125^{x-3} = 5^{3-x}$.
280.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 50.
281.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,-3)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu 4.
282.Se consideră triunghiul ABC,cu AB=13,AC=13 și BC=24.Arătați că $\sin B = \frac{5}{13}$.

283.Determinați numărul real x,știind că numerele $6, -3x$ și x^2+3 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
284.Determinați numărul real m,știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+m$ este tangentă axei Ox.
285.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}=64^x$.
286.Calculați probabilitatea ca,alegând o submulțime a mulțimii $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel puțin două elemente.
287.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$,$B(1,0)$ și $C(1,4)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este perpendiculară pe mediana din A a triunghiului ABC.
288.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $C=\frac{3\pi}{4}$ și $AB=3\sqrt{2}$.
289.Determinați numărul real x,știind că numerele $3, 2x$ și x^2+1 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
290.Determinați numărul real m,știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-6x+m$ este tangentă axei Ox.
291.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-21}=125^x$.
292.Calculați probabilitatea ca,alegând o submulțime a mulțimii $A=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.
293.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$,$B(2,0)$ și $C(2,4)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.
294.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $B=\frac{5\pi}{6}$ și $AC=3$.
295.Determinați numerele reale a și b,știind că $(a+b)(i-1)=(a-b+1)(i+1)$,unde $i^2=-1$.
296.Determinați numerele reale m,pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-2mx+2$,are valoarea minimă egală cu -6.
297.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5 x=\log_x 5$.
298.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre divizori ai lui 24.
299.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,a)$,$B(0,-6)$ și $C(2,2)$,unde a este număr real.Determinați numărul real a,știind că AB+BC=AC.
300.Determinați $a\epsilon(0,\pi)$,știind că $\left(\sin\frac{\pi}{8}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin a\right)^2=2$.
301.Determinați numerele reale a și b,știind că $(a+b)(i+2)=(a-b+1)(i-2)$,unde $i^2=-1$.
302.Determinați numerele reale m,pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx-1$,are valoarea minimă egală cu -10.
303.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7 x=\log_x 7$.
304.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă ambele cifre multiplii de 3.
305.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$,$B(-3,-3)$ și $C(2,2)$,unde a este număr real.Determinați numărul real a,știind că BA+AC=BC.
306.Determinați $a\epsilon(0,\pi)$,știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2=2$.
307.Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$,știind că $a_1=2$ și $a_2=-5$.
308.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=2a-x$.
309.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{5-x}=2^{2x+3}$.
310.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 3.
311.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,2)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 3.
312.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 și BC=13.Arătați că $\sin B=\frac{12}{13}$.
313.Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$,știind că $a_1=4$ și $a_2=6$.
314.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(3,-5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-2x$.
315.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^{4-x}=5^{2x-4}$.
316.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
317.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(3,1)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu -2.
318.Se consideră triunghiul ABC cu AB=5,AC=12 și BC=13.Arătați că $\mathrm{tg}C=\frac{5}{12}$.
319.Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$,știind că $a_1=3$ și $a_2=6$.
320.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(3,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-2x$.
321.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{5-x}=9^{2x+3}$.
322.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 2.
323.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2,2)$.Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 4.
324.Se consideră triunghiul ABC cu AB=6,AC=10 și BC=8.Arătați că $\mathrm{ctg}C=\frac{4}{3}$.
325.Arătați că $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=8$.
326.Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$.
327.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-2x+2)=0$.
328.Determinați câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 3,4 și 5.
329.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(3,2)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.
330.Arătați că $\sin(\pi-2x)+\sin(\pi+2x)=0$,pentru orice număr real x.
331.Arătați că $(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2=18$.
332.Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-4$.
333.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2-5x+5)=0$.
334.Determinați câte numere naturale impare,de trei cifre distincte,se pot forma cu cifrele 4,5 și 6.
335.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(3,4)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.
336.Arătați că $\sin(2\pi-x)+\sin(2\pi+x)=0$,pentru orice număr real x.
337.Se consideră numerele complexe $z_1=3+4i$ și $z_2=2-4i$.Arătați că numărul z_1+z_2 este real.
338.Calculați $(f\circ g)(2)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x$.
339.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-729=0$.

340.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 9.
341.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație y=3x+1 și punctul A(6,0). Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
342.Arătați că $\cos(\pi-x)\cos x-\sin(\pi-x)\sin x=-1$,pentru orice număr real x.
343.Se consideră numerele complexe $z_1=2-3i$ și $z_2=1+3i$.Arătați că numărul z_1+z_2 este real.
344.Calculați $(f\circ g)(-1)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=-3x$.
345.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-256=0$.
346.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 6.
347.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație y=4x−1 și punctul A(2,0). Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
348.Arătați că $\sin(2\pi-x)\sin x-\cos(2\pi-x)\cos x=-1$,pentru orice număr real x.
349.Se consideră numărul complex z=2+i.Calculați $(z-2)^2$.
350.Arătați că $3(x_1+x_2)-5x_1x_2=5$,știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+2=0$.
351.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x-5\cdot4^x+4=0$.
352.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 18.
353.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație y=3x−4 și punctul A(1,0). Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
354.Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC,știind că AC=12 și B=$\frac{\pi}{6}$.
355.Se consideră numărul complex z=2+2i.Calculați $(z-2)^2$.
356.Arătați că $4(x_1+x_2)-5x_1x_2=4$,știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-6x+4=0$.
357.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x-6\cdot5^x+5=0$.
358.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 16.
359.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație y=4x+3 și punctul A(2,0). Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
360.Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC,știind că AB=$16\sqrt{3}$ și C=$\frac{\pi}{3}$.
361.Calculați partea reală a numărului complex z=$\frac{3+4i}{4-3i}$.
362.Determinați numărul real a,știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+2x-a$ are graficul tangent axei Ox.
363.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}+4\cdot9^x-405=0$.
364.Calculați probabilitatea ca,alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii A={1,2,3,4,5,6,7,8},aceasta să aibă un singur element număr par.
365.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(3,4) și N(5,2).Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.
366.Arătați că $(\sin x-\sin(2\pi-x))^2+(\cos x-\cos(\pi-x))^2=4$, pentru orice număr real x.
367.Calculați partea reală a numărului complex z=$\frac{2-3i}{3+2i}$.
368.Determinați numărul real a,știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+3x+a$ are graficul tangent axei Ox.
369.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+5\cdot4^x-96=0$.
370.Calculați probabilitatea ca,alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii A={1,2,3,4,5,6,7,8,9},aceasta să aibă un singur element număr impar.

371.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(4,5) și N(4,1).Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.
372.Arătați că $(\sin x+2\sin(\pi-x))^2+(\cos x+2\cos(2\pi-x))^2=9$, pentru orice număr real x.
373.Se consideră numărul complex z=2+2i.Calculați z^2.
374.Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2-3x+6$ nu intersectează axa Ox.
375.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x-4)=\log_3(x+2)$.
376.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie impar.
377.În triunghiul ABC punctele M,N și P sunt mijloacele laturilor AB,BC și,respectiv,AC.Arătați că $\vec{BM}+\vec{CN}+\vec{AP}=\vec{0}$.
378.Știind că tga=$\sqrt{5}$ și a∊ℝ,arătați că $\frac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
379.Se consideră numărul complex z=2+i.Calculați z^2.
380.Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=-x^2+4x-6$ nu intersectează axa Ox.
381.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(3x-3)=\log_5(x+1)$.
382.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie impar.
383.În triunghiul ABC punctele M,N și P sunt mijloacele laturilor AB,BC și,respectiv,AC.Arătați că $\vec{MA}+\vec{NB}+\vec{PC}=\vec{0}$.
384.Știind că tga=$\sqrt{3}$ și a∊ℝ,arătați că $\frac{\sin a+\cos a}{\cos a-\sin a}=-2-\sqrt{3}$.
385.Determinați partea reală a numărului complex z=3−2i+i^2.
386.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=3x-6$.
387.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-x}=2^{2x}$.
388.Determinați câte numere naturale pare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,4 și 3.
389.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{AC}=(m-1)\vec{i}+4\vec{j}$,unde m este număr real.Determinați numărul real m știind că $\vec{AC}=2\vec{AB}$.
390.Se consideră triunghiul ABC cu AC=BC=3 și AB=$3\sqrt{2}$.Determinați cosB.
391.Determinați partea reală a numărului complex z=2+3i+4i^2.
392.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=3x+5$.
393.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-2x}=5^{3x}$.
394.Determinați câte numere naturale impare,de două cifre,se pot forma cu cifrele 0,1,2 și 3.
395.În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{AB}=3\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{AC}=(m+1)\vec{i}-4\vec{j}$,unde m este număr real.Determinați numărul real m știind că $\vec{AC}=2\vec{AB}$.
396.Se consideră triunghiul ABC cu AB=BC=3 și AC=$3\sqrt{2}$.Determinați cosA.
397.Determinați numărul real x știind că numerele 3,6 și x+7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
398.Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+x+3$ este situată deasupra axei Ox.
399.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-16}=3$.
400.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 5.

401.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,5)$ și $B(2,3)$.Determinați lungimea vectorului $\vec{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.
402.Știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$, calculați sin2x.
403.Determinați numărul real x știind că numerele 2,6 și x+8 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
404.Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+x-4$ este situată sub axa Ox.
405.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-3}=5$.
406.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă suma cifrelor egală cu 8.
407.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,6)$ și $B(1,2)$.Determinați lungimea vectorului $\vec{OM}$,unde punctul M este mijlocul segmentului AB.
408.Știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați sin2x.
409.Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ știind că $a_1=3$ și $a_2=6$.
410.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+2$.
411.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(5^x-1)(5^x-5)=0$.
412.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conțină cifra 2.
413.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu AC=3.Calculați lungimea vectorului $\vec{AC}+\vec{CB}$.
414.Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $A=\frac{\pi}{2}$ și AC=6.
415.Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ știind că $a_1=4$ și $a_2=8$.
416.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+4$.
417.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(4^x-1)(4^x-4)=0$.
418.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conțină cifra 4.
419.Se consideră triunghiul echilateral ABC cu BC=5.Calculați lungimea vectorului $\vec{AB}+\vec{BC}$.
420.Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $B=\frac{\pi}{2}$ și AB=8.
421.Arătați că $4(2+3i)+2(1-6i)=10$.
422.Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+4$ este tangentă la axa Ox.
423.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+1}=3^{2x}$.
424.Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,4 și 5.
425.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(-3,-1)$ și $C(3,1)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.
426.Arătați că $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{3}=0$.
427.Arătați că $3(5+4i)+2(3-6i)=21$.
428.Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+4$ este tangentă la axa Ox.
429.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+9}=2^{-6x}$.
430.Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,3,5,7și 9.
431.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(-5,-3)$ și $C(5,3)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.
432.Arătați că $\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}=0$.
433.Determinați numerele reale a și b,știind că a+ib este conjugatul numărului complex $z=\frac{2+i}{2-i}$.

434.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+6x-10$.
435.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2-9)=\log_2(8x-21)$.
436.Calculați probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie divizibil cu 200.
437.Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\vec{AB}=5\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{BC}=2\vec{i}-6\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{BC}$.
438.Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC,știind că BC=6,$C=\frac{\pi}{4}$ și $B=\frac{7\pi}{12}$.
439.Determinați numerele reale a și b,știind că a+ib este conjugatul numărului complex $z=\frac{2-i}{2+i}$.
440.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-6x+8$.
441.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2-4)=\log_5(5x-10)$.
442.Calculați probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să fie divizibil cu 110.
443.Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\vec{AC}=4\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{CB}=2\vec{i}-5\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AC}+\vec{AB}+\vec{CB}$.
444.Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC,știind că AB=8,$A=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{7\pi}{12}$.
445.Determinați numerele reale a și b,știind că $\frac{2+i}{2-i}=a+ib$ și $i^2=-1$.
446.Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-8x+12$.
447.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{\frac{x+2}{2}}+2^{x+1}=24$.
448.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu conțină cifra 5.
449.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,4)$ și $C(1,-3)$.Determinați ecuația paralelei duse prin A la BC.
450.Determinați $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{2+\sin x}{\sin x}=\frac{2+\cos x}{\cos x}$.
451.Determinați numerele reale a și b,știind că $\frac{2-i}{2+i}=a+ib$ și $i^2=-1$.
452.Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+8x+15$.
453.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{\frac{x+2}{2}}-2^{x+1}=16$.
454.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să conțină cifra 7.
455.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$, $B(-3,-4)$ și $C(-1,3)$.Determinați ecuația paralelei duse prin B la AC.
456.Determinați $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{2-\sin x}{\sin x}=\frac{2-\cos x}{\cos x}$.
457.Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$ cu termeni reali,știind că $b_1=1$ și $b_4=125$.
458.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$.
459.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2}=25^{1-x}$.
460.Calculați probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie cub perfect.

461.Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\vec{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AC}$.
462.Calculați sinusul unghiului C al triunghiului ABC în care AB=5,BC=4 și sinA= $\frac{4}{5}$.
463.Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,știind că $b_1 = 1$ și $b_4 = 64$.
464.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 6$.
465.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+3} = 9^{3-x}$.
466.Calculați probabilitatea ca,alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să nu fie cub perfect.
467.Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\vec{AC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{CB} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AB}$.
468.Calculați sinusul unghiului B al triunghiului ABC în care BC=4,AC=5 și sinA= $\frac{4}{5}$.
469.Arătați că numărul a=$2(3 - 3i) + 3(5 + 2i)$ este real.
470.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 6x - 3$.Calculați $f(1) + f(2) + \cdots + f(10)$.
471.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x) = \log_3(2 + x)$.
472.După o scumpire cu 10% prețul unui produs este 3300 de lei.Calculați prețul produsului înainte de scumpire.
473.Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + (a + 2)\vec{j}$ sunt coliniari.
474.Determinați $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,știind că $\frac{5\sin x+\cos x}{\sin x} = 6$.
475.Arătați că numărul a=$4(3 - 2i) + 2(5 + 4i)$ este real.
476.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$.Calculați $f(1) + f(2) + \cdots + f(20)$.
477.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(4x) = \log_4(3 + x)$.
478.După o scumpire cu 20% prețul unui produs este 2400 de lei.Calculați prețul produsului înainte de scumpire.
479.Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} - (a + 1)\vec{j}$ sunt coliniari.
480.Determinați $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,știind că $\frac{\sin x+3\cos x}{\cos x} = 4$.
481.Determinați numărul real x pentru care numerele 1,3x+3 și 11 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
482.Calculați distanța dintre punctele de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
483.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 16} = x + 4$.
484.Determinați câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,știind că $a,b\in\{4,5,6,7\}$ și $a\neq b$.
485.În dreptunghiul ABCD,cu AB=12 și BC=9,se consideră vectorul $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AO} + \vec{AD}$,unde $\{O\} = AC \cap BD$.Calculați lungimea vectorului $\vec{v}$.
486.Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=8,BC=12 și sinC= $\frac{3}{5}$.
487.Determinați numărul real x pentru care numerele 1,2x+3 și 9 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
488.Calculați distanța dintre punctele de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$.
489.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 25} = x + 5$.
490.Determinați câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma,știind că $a,b\in\{2,3,5,6\}$ și $a\neq b$.
491.În dreptunghiul ABCD,cu AB=8 și BC=6,se consideră vectorul $\vec{v} = \vec{BA} + \vec{BO} + \vec{BC}$,unde $\{O\} = AC \cap BD$.Calculați lungimea vectorului $\vec{v}$.

492.Calculați sinusul unghiului B al triunghiului ABC în care BC=6,AC=10 și sinA= $\frac{3}{5}$.
493.Arătați că numărul n=$\left(\sqrt{5} + 2\right)^2 - 4\sqrt{5}$ este natural.
494.Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 9$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
495.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3 - x^2) = \log_3 2x$.
496. Calculați probabilitatea ca,alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii A={1,2,3,4,5,6,7},aceasta să aibă cel mult două elemente.
497.Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\vec{AB} = \bar{2}\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{BC} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.Determinați lungimea segmentului [AC].
498.Se consideră numerele reale a și b astfel încât a+b= $\frac{\pi}{4}$.Arătați că 2cosb=$\sqrt{2}$cosa+$\sqrt{2}$sina.
499.Arătați că numărul n=$\left(\sqrt{5} - 2\right)^2 + 4\sqrt{5}$ este natural.
500.Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 9$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
501.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4 - x^2) = \log_2 3x$.
502. Calculați probabilitatea ca,alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii A={1,2,3,4,5,6,7,8},aceasta să aibă cel mult un element.
503.Se consideră punctele A,B și C astfel încât $\vec{AC} = \vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{CB} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.Determinați lungimea segmentului [AB].
504.Se consideră numerele reale a și b astfel încât a+b= $\frac{\pi}{6}$.Arătați că 2cosb=$\sqrt{3}$cosa+sina.
505.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 40.Determinați a_2.
506.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=$x^2 + 8x + 16$.Arătați că $(f \circ f)(-4) = 16$.
507.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 3) = 5 - \log_2(x + 15)$.
508.Dterminați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii {0,1,2,3,4,5,6,7,8}.
509.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AB și punctual E mijlocul segmentului CD.Arătați că $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{1}{4}\vec{AB}$.
510.Se consideră triunghiul ABC cu AC=$2\sqrt{3}$, A= $\frac{\pi}{4}$ și C= $\frac{5\pi}{12}$.Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.
511.Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 50.Determinați a_2.
512.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=$x^2 - 8x + 16$.Arătați că $(f \circ f)(4) = 16$.
513.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 5) = 5 - \log_2(x + 9)$.
514.Dterminați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
515.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AB și punctual E mijlocul segmentului CD. Arătați că $\vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{CB}$.
516.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$6\sqrt{3}$, A= $\frac{5\pi}{12}$ și B= $\frac{\pi}{4}$.Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.
517.Arătați că numărul a=$8-3\sqrt{7}+\frac{1}{8-3\sqrt{7}}$ este natural.
518.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1$.Arătați că $(f \circ f)(1) = f(4) + 4$.
519.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x^2} = 9 \cdot 3^x$.

520.Determinați numărul natural nenul n, știind că mulțimea A={1,2,3, … , n} are exact 28 submulțimi cu două elemente.
521.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$,$N(0,6)$ și $A(3,a)$,unde a este număr real.Știind că AM=AN, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .
522.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care 6cosx−5=5cos2x.Calculați cosx.
523.Arătați că numărul $a=8+3\sqrt{7}+\frac{1}{8+3\sqrt{7}}$ este natural.
524.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$.Arătați că $(f\circ f)(1)=f(2)+4$.
525.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x^2}=3\cdot 9^x$.
526.Determinați numărul natural nenul n, știind că mulțimea A={1,2,3, … , n} are exact 45 submulțimi cu două elemente.
527.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$,$N(5,0)$ și $A(a,4)$,unde a este număr real.Știind că AM=AN, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5 .
528.Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care 6cosx−3=3cos2x.Calculați cosx.
529.Arătați că numărul $n=(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
530.Se considera funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x-a$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real x.
531.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{-x}=2$.
532.Se consideră mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7}.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1.
533.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-6,6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM.
534.Triunghiul ABC este dreptunghic în A și sinC=cosC.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
535.Arătați că numărul $n=(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$ este întreg, unde $i^2=-1$.
536.Se considera funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=5x-a$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că $f(x)+f(1-x)=9$, pentru orice număr real x.
537.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $11^x+11^{-x}=2$.
538.Se consideră mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8}.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1.
539.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(6,-6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM.
540.Triunghiul ABC este dreptunghic în B și cosA=sinA.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
541.Se consideră numărul complex $z=-2-i$.Arătați că $z^2+4z+5=0$.
542.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul $M(0,6)$ aparține graficului funcției f.
543.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt[3]{x^3+3x}$.
544.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea {1,2,3,4,5}, acesta să aibă cifra sutelor egală cu 4 și cifra unităților egală cu 3.
545.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$,$B(5,4)$ și $C(a,6)$, unde a este un număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.
546.Măsurile unghiurilor A,B și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai Unei progresii aritmetice.Demonstrați că măsura unghiului A este egală cu $\frac{\pi}{6}$.
547.Se consideră numărul complex $z=-2+i$.Arătați că $z^2+4z+5=0$.

548.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+a$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul $M(0,5)$ aparține graficului funcției f.
549.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt[3]{x^3+5x}$.
550.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea {1,2,3,4,5}, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 3 și cifra unităților egală cu 2.
551.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$,$B(2,4)$ și $C(6,a)$, unde a este un număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.
552.Măsurile unghiurilor B,A și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.Demonstrați că măsura unghiului A este egală cu $\frac{\pi}{3}$.
553.Arătați că numărul $N=\log_2 18-2\log_2 3+\log_2 8$ este natural.
554.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+5$.Arătați că dreapta de ecuație y=5 intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
555.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-7}=\sqrt{5x-1}$.
556.Dterminați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 28 submulțimi cu două elemente.
557.Se consideră triunghiul ABC și punctele M,N și P mijloacele segmentelor AC,AM, respectiv CM. Arătați că $\vec{BM}+\vec{BN}+\vec{BP}=\frac{3}{2}(\vec{BC}+\vec{BA})$.
558.Determinați $x\in(0,\pi)$,știind că $\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x=0$.
559.Arătați că numărul $N=\log_2 24-2\log_2 3+\log_2 6$ este natural.
560.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+4$.Arătați că dreapta de ecuație y=4 intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
561.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-8}=\sqrt{6x-1}$.
562.Dterminați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 21 submulțimi cu două elemente.
563.Se consideră triunghiul ABC și punctele M,N și P mijloacele segmentelor BC,BM, respectiv CM. Arătați că $\vec{AM}+\vec{AP}+\vec{AN}=\frac{3}{2}(\vec{AC}+\vec{AB})$.
564.Determinați $x\in(0,\pi)$,știind că $\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x=0$.
565.Calculați modulul numărului complex $z=(3-2i)(3+2i)-(9-3i)$.
566.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=4x+20$ .Calculați $(g\circ f)(2)$.
567.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-4}=\frac{1}{125}$.
568.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
569.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=8,BC=2 și măsura unghiului ABC de 120°.Determină modulul vectorului $\vec{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.
570.Se consideră triunghiul ABC cu AB=20,AC=12 și BC=16.Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.
571.Calculați modulul numărului complex $z=(2-3i)(2+3i)-(9-3i)$.
572.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$ .Calculați $(g\circ f)(3)$.
573.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5}=\frac{1}{64}$.
574.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.

575.Se consideră paralelogramul ABCD cu AB=2,BC=8 și măsura unghiului ABC de 120°.Determină modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.
576.Se consideră triunghiul ABC cu AB=12,AC=20 și BC=16.Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.
577.Arătați că $(2-i)^2-2(3-2i)+1=0$, unde $i^2=-1$.
578.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-3$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul M(1,4) aparține graficului funcției f.
579.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+3)=\log_4 x+\log_4(x+3)$.
580.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5 și cu 4.
581.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(1,0) ,N(4,3) și P(0,3). Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN.
582.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A.Arătați că $\text{tg}C=\frac{1}{\text{tg}B}$.
583.Arătați că $(2+i)^2-2(3+i)+1=0$, unde $i^2=-1$.
584.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul M(1,4) aparține graficului funcției f.
585.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+4)=\log_4 x+\log_4(x+4)$.
586.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4 și cu 5.
587.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(4,3) ,N(1,0) și P(0,3). Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN.
588.Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A.Arătați că $\text{tg}B=\frac{1}{\text{tg}C}$.
589.Calculați media aritmetică a numerelor reale $a=2020-\sqrt{2}$ și $b=2020+\sqrt{2}$.
590.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+1$ .Determinați numărul real m, știind că punctul A(1, m) aparține graficului funcției f.
591.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(\sqrt{x}+3)+\log_2(\sqrt{x}-3)=2$.
592.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 128 submulțimi.
593.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(2,0),N(6,2) și P(4,2).Determinați coordonatele punctului Q, știind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
594.Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care sin2C·cosC=sinC.Arătați că $C=\frac{\pi}{4}$.
595.Calculați media aritmetică a numerelor reale $a=2023-\sqrt{3}$ și $b=2023+\sqrt{3}$.
596.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+1$ .Determinați numărul real m, știind că punctul A(1, m) aparține graficului funcției f.
597.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(\sqrt{x}+5)+\log_5(\sqrt{x}-5)=2$.
598.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 64 submulțimi.
599.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(6,0),N(8,6) și P(4,6).Determinați coordonatele punctului Q, știind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.
600.Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care 2sin2B·cosB=3sinB. Arătați că $B=\frac{\pi}{6}$.
601.Arătați că numerele $10+5\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ și $2-\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
602.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$, unde m este număr real.Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.
603.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+3}=3^x+26$.

604.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 2.
605.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii BC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AC sunt paralele.
606.Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care AC=6 și măsurile unghiurilor A și B sunt de 60° , respectiv 30°.
607.Arătați că numerele $10-5\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
608.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+2$, unde m este număr real.Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.
609.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+3}=5^x+124$.
610.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 5.
611.Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii BC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.
612.Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care AC=5 și măsurile unghiurilor A și B sunt de 30° , respectiv 60°.
613.Arătați că $3(1-2i)+2i(3-i)=5$, unde $i^2=-1$.
614.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-1$.Determinați numărul real a pentru care $f(a)=3+a^2$.
615.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x^2+3)=2$.
616.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele pare și distincte.
617.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,3),B(5,1) și C(2,4).Determinați coordonatele punctului D,știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
618.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât BC=15 și sinC=2sinB.Arătați că lngimea laturii AC este egală cu 5.
619.Arătați că $3(1+2i)-2i(3-i)=5$, unde $i^2=-1$.
620.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-1$.Determinați numărul real a pentru care $f(a)=3+a^2$.
621.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x^2+3)=2$.
622.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.
623.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,0),B(2,6) și C(6,2).Determinați coordonatele punctului D,știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
624.Se consideră triunghiul ABC,dreptunghic în A,astfel încât BC=15 și sinB=2sinC.Arătați că lngimea laturii AB este egală cu 5.
625.Arătați că $8-3\sqrt{3}+3(\sqrt{3}-1)=5$.
626.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=5x+m$, unde m este număr real.Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=6$.
627.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5\cdot 3^{2x}+9^x=6$.
628.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 8.
629.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=6x-5$ și punctul A(a, a), unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul A aparține dreptei d.

630.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=8 și cosB=0.Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 32.
631.Arătaţi că $9-7\sqrt{7}+7(\sqrt{7}-1)=2$.
632.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m$, unde m este număr real.Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=8$.
633.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4\cdot 3^{2x}+9^{x}=5$.
634.Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 9.
635.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie y=5x−4 și punctul A(a, a), unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctul A aparține dreptei d.
636.Se consideră triunghiul isoscel ABC,cu AB=10 și cosB=0.Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 50.
637.Arătaţi că $3i(4-i)-12i=3$, unde $i^2=-1$.
638.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real.Determinați numărul real m, știind că punctul $f(2)=f(-2)$.
639.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^{x-2}=25^{x}$.
640.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 5.
641.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,3) și B(−1,1).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\vec{AC}=\vec{3BC}$.
642.Se consideră consideră expresia $E(x)=2\text{ctg}x\cdot\sin\frac{2x}{3}-\sin 2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
643.Arătaţi că $3i(3-i)-9i=2$, unde $i^2=-1$.
644.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real.Determinați numărul real m, știind că punctul $f(-2)=f(2)$.
645.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $125^{x-1}=25^{x}$.
646.Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 6.
647.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) și B(1, −1).Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\vec{AC}=\vec{3BC}$.
648.Se consideră consideră expresia $E(x)=2\text{tg}x\cdot\sin\frac{2x}{3}-\sin 2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Subiectul II1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1)) = 9$.

b)Demonstrați că $A(a)A(b) = abI_3 + (a+b+2)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\cdot \ldots \cdot A(2020) = \frac{n!}{2}\cdot A(0)$.

2.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1)) = 9$.

b)Demonstrați că $A(a)A(b) = abI_3 + (a+b+2)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\cdot \ldots \cdot A(2021) = \frac{n!}{2}\cdot A(0)$.

3.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+az=1 \\ -ax-y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

b)Demonstrați că $\det(A(a)) = a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0, y_0, z_0) cu x_0,y_0 și z_0 numere întregi.

4.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+az=1 \\ -x-ay+z=1 \\ ax+y+z=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

b)Demonstrați că $\det(A(a)) = a(a-1)(1+a)$, pentru orice număr real a.

c)Pentru a=0, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0, y_0, z_0) cu x_0,y_0 și z_0 numere întregi.

5.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} -2a & 0 & 2a \\ 0 & 4 & 0 \\ 2a & 0 & -2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(a)) = 0$, pentru orice număr real a.

b)Demonstrați că $A(a)A(b) = 4A(-ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot \ldots \cdot A(\log_{31} 32)$ are toate elementele numere întregi.

6.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a & 0 & -2a \\ 0 & 4 & 0 \\ -2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(a)) = 0$, pentru orice număr real a.

b)Demonstrați că $A(a)A(b) = 4A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot \ldots \cdot A(\log_{63} 64)$ are toate elementele numere întregi.

7.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ln(a+2) & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>0.

a)Arătați că $\det(A(1)) = 3$.

b)Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab+2a+2b+2)$, pentru orice numere reale a și b , a>0,b>0.

c)Determinați numărul real a,a>0, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(25)$.

8.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, a>0.

a)Arătați că $\det(A(1)) = 3$.

b)Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab+2a+2b+2)$, pentru orice numere reale a și b , a>0,b>0.

c)Determinați numărul real a,a>0, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(62)$.

9.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+1y+3z=4 \\ x+2y+4z=5 \\ -x+my-z=-2 \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătați că $\det(M(0)) = 3$.

b)Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

c)Pentru m=1, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2 = (x_0+z_0)^2$.

10.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ -1 & m & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+3z=4 \\ -x+my-z=-2 \\ x+2y+4z=5 \end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătați că $\det(M(0)) = 3$.

b)Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

c)Pentru m=1, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2 = (x_0+z_0)^2$.

11.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y+az=2 \\ 2x+ay+4z=3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(a)) = a(3-a)$, pentru orice număr real a.

b)Pentru a=0, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil

c)Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0,y_0 și z_0 sunt numere întregi.

12.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+4z=3 \\ x+2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$,unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(a)) = a(a-3)$, pentru orice număr real a.

b)Pentru a=0, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil

c)Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0,y_0 și z_0 sunt numere întregi.

13.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x-3&1&0\\0&0&e^{x-3}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(3))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y-3)$, pentru orice numere x şi y.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(20)=A(m^2+m+133)$.

14.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&x-3&0\\0&1&0\\0&0&e^{x-3}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(3))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y-3)$, pentru orice numere x şi y.
c)Determinaţi numărul real m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(20)=A(m^2+m+133)$.

15.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1&2m&1\\2m&1&1\\1&1&2m\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2my+z=0\\2mx+y+z=-1\\x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=-2$.
b)Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m))=0$.
c)Pentru $m=-1$, demonstraţi că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a,b şi c este întreg.

16.Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1&1&2m\\1&2m&1\\2m&1&1\end{pmatrix}$, şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+2my+z=0\\x+y+2mz=1\\2mx+y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(0))=2$.
b)Determinaţi numerele reale m, ştiind că $\det(M(m))=0$.
c)Pentru $m=-1$, demonstraţi că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a,b şi c este întreg.

17.Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a+1&1&1\\1&-1&-a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y+z=2\\(a+1)x+y+z=0,\\x-y-az=1\end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(-1))=0$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.
c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0)şi $2x_0-y_0z_0=0$.

18.Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\a+1&-1&-1\\1&1&a\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y-z=2\\(a+1)x-y-z=0,\\x+y+az=1\end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(M(-1))=0$.
b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.
c)Determinaţi numerele reale a, ştiind că sistemul are soluţie unică (x_0,y_0,z_0)şi $2x_0-y_0z_0=0$.

19.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}x&1&y\\x&y&1\\1&x&y\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A(2,3))=12$.
b)Demonstraţi că $\det(A(n^2,n))\geq 0$, pentru orice număr natural n.
c)Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

20.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix}y&x&1\\1&y&y\\x&1&x\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

a)Arătaţi că $\det(A(3,2))=12$.
b)Demonstraţi că $\det(A(n^2,n))\geq 0$, pentru orice număr natural n.
c)Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

21.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x&0&6x-3\\0&\frac{1}{2}&0\\6x-3&0&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
b)Demonstraţi că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr reale x.

22.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x&0&4x-2\\0&\frac{1}{2}&0\\4x-2&0&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
b)Demonstraţi că $A(1-x)+A(x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(1-x)\cdot A(x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr reale x.

23.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-x\\-x&0&0\\0&-x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)A(z)=-xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y şi z.
c)Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.

24.Seconsideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\x&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstraţi că $A(x)A(y)A(z)=xyzI_3$, pentru orice numere reale x,y şi z.
c)Demonstraţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)-A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.

25.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&1\\x+3&1&1\\1&x&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=-3$.
b)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))\cdot\det(A(x+1))=54$.
c)Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(1)$.

26.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x+1 & 1\\ 1 & 1 & x\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0))=-1$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))\cdot\det(A(x+1))=12$.
c)Determinați matricea $X\epsilon\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(0)$.

27.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 2(1-x)\\ 0 & 1 & 0\\ x-1 & 0 & 2x-1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=1$.
b)Demonstrați că $\det(A(x)A(-x))\le 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătați că,dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n)=A(3)$,atunci m+n=4.

28.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-2x & 0 & 2x-1\\ 0 & 1 & 0\\ 2(1-2x) & 0 & 4x-1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det\left(A\left(\frac{1}{2}\right)\right)=1$.
b)Demonstrați că $\det(A(x)A(-x))\le 0$,pentru orice număr real x.
c)Arătați că,dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n)=A(4)$,atunci m+n=3.

29.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & a\\ -2 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y+3z=0\\ x+3y+az=0,\\ -2x-3y+2z=0\end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(11))=0$.
b)Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
c)Demonstrați că,dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0),cu x_0,y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $x_0-y_0+z_0=11(x_0+y_0-3z_0)$.

30.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & a\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+2z=0\\ 2x+y+az=0,\\ -x-2y+3z=0\end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(9))=0$.
b)Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
c)Demonstrați că,dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0),cu x_0,y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $x_0-y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

31.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 3^x & 9^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=2$.
b)Demonstrați că $\det(A(x))=(3^x-1)(3^x+x-x\cdot 3^x)$,pentru orice număr real x.
c)Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2017)=\begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & \frac{3}{2}(3^{2017}-1) & \frac{9}{8}(9^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

32.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 8^x\\ 1 & x & 3x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=2$.
b)Demonstrați că $\det(A(x))=(2^x-1)(4^x+2^x+2x-x\cdot 4^x-x\cdot 2^x)$,pentru orice număr real x.
c)Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\cdots+A(2018)=\begin{pmatrix} 2018 & 2018 & 2018\\ 2018 & 2(2^{2018}-1) & \frac{8}{7}(8^{2018}-1)\\ 2018 & 2019\cdot 1009 & 2019\cdot 3027\end{pmatrix}$.

33.Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x\\ 0 & x & 0\\ 6 & 0 & 0\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculați $\det(A(3))$.
b)Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$,pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=3B(1)$.

34.Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x\\ 0 & x & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$,unde x este un număr real.
a)Calculați $\det(A(4))$.
b)Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$,pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=-B(-7)$.

35.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 4\\ 1 & 4 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+ay+4z=3\\ x+4y+az=3\end{cases}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(a))=(a+2)(a-4)$,pentru orice număr real a.
b)Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(3-m)=A(3-m)A(m)$.
c)Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0),iar x_0,y_0 și z_0 sunt numere întregi.

36.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & -3\\ 1 & -3 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+ay-3z=-2\\ x-3y+az=-2\end{cases}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(a))=(a-5)(a+3)$,pentru orice număr real a.
b)Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.
c)Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0),iar x_0,y_0 și z_0 sunt numere întregi.

37.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & 1\\ a & 3 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay+z=1\\ ax+3y-z=-1\\ x+y-4z=0\end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(3))=0$.
b)Demonstrați că matricea A(a) este inversabilă, pentru orice număr real a, a≠−3 și a≠3.
c)Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0,y_0 și z_0 sunt numere întregi.

38.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & -a & 1\\ -a & 2 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-ay+z=1\\ -ax+2y-z=-1\\ x+y-3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0))=-12$.

b)Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-2$ și $a\neq2$.

c)Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

39. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -3a & 9a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x-3ay+9a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y+3az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(-1))=2^5$.

b)Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,$a\neq-\frac{1}{9}$ și $a\neq\frac{1}{3}$.

c)Determinați numerele reale a,pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

40. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & -1 & 1\\ 4a^2 & 1 & -2a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=6\\ 2ax-y+z=-1\\ 4a^2x+y-2az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=15$.

b)Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă,pentru orice număr real a,$a\neq-\frac{1}{2}$ și $a\neq\frac{1}{6}$.

c)Determinați numerele reale a,pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

41.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2-x\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real a,$a\neq-1$,știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2019\cdot2020}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

42.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3x & 1 & 0\\ 9x^2+3x & 6x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$,pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real a,$a\neq0$,știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2018\cdot2019}\right)=A\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

43.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 2 & 2\\ 2 & -m & 2\\ 2 & 2 & -m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-mx+2y+2z=-2\\ 2x-my+2z=-2\\ 2x+2y-mz=m\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0))=16$.

b)Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq-2$ și $m\neq4$.

c)Pentru m=4,determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+4z_0=17$.

44.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+mz=-m\\ x+my+z=-1\\ mx+y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0))=-2$.

b)Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m,$m\neq1$ și $m\neq-2$.

c)Pentru m=−2,determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0-2y_0+3z_0=11$.

45.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(10))=1024$.

b)Determinați numerele reale x,știind că $A(x)\cdot A(2x)=A(-x^2-2)$.

c)Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2014)$,demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2015.

46.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5^x\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(5))=3125$.

b)Determinați numerele reale x,știind că $A(2x)\cdot A(3x)=A(x^2+4)$.

c)Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$,demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2021.

47.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 2 & m\\ m & m & 2\\ 2 & m & 2\end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Calculați $\det(A(2))$.

b)Determinați valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

c)Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

48.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2m\\ 2m & 2m & 2\\ 2 & 2m & 2\end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Calculați $\det(A(1))$.

b)Determinați valorile reale ale lui m,pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

c)Rezolvați ecuația matriceală $A(0)\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,unde $X\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

49.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & 0 & -2x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=0$.

b)Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$,pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numerele reale x,știind că $A(x)A(x)A(x)=A(9)$.

50.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 3x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1+3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=3$.

b)Arătaţi că $A(x)A(y) = A(2xy + x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,ştiind că $A(x)A(x)A(x) = A(13)$.

51.Se consideră matricea $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 4x & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(B(1)) = -3$.
b)Arătaţi că $B(x) + B(y) = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2 + 1)B(2x) = B(x^2 + 2x + 1)$.

52.Se consideră matricea $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(B(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $B(2x) + B(2y) = 2B(x + y)$,pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2 + 1)B(3x) = B(x^2 + 3x + 1)$.

53.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3x & 0 \\ 3x & 0 & 3x \\ 0 & 3x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=0$.
b)Arătaţi că $A\cdot B(x) + B(x) \cdot A = 9B(x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x) \cdot B(x) = B(x^2 + x - 18)$.

54.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -x & 0 & -x \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A=0$.
b)Arătaţi că $A\cdot B(x) + B(x) \cdot A = 3B(-x)$,pentru orice număr real x.
c)Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x) \cdot B(x) = B(x^2 + x - 2)$.

55.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & a+2 \\ 2 & a+3 & a+4 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(a))$.
b)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $2A(n^2) - A(n) = A(15)$.
c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\epsilon\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$A(2017) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

56.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+2 \\ 1 & a+2 & a+4 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Calculaţi $\det(A(a))$.
b)Determinaţi numărul natural n,ştiind că $2A(n^2) - A(n) = A(45)$.
c)Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\epsilon\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$A(2018) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

57.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $A(1) + A(-1) = 2A(0)$.
b)Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x) + I_3) = 0$.
c)Arătaţi că $\det(aI_3 - bA(-1) + cA(-1) \cdot A(-1)) \geq 0$,pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.

58.Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătaţi că $A(1) + A(-1) = 2A(0)$.
b)Rezolvaţi înmulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x) + I_3) = 0$.
c)Arătaţi că $\det(aI_3 - bA(-1) + cA(-1) \cdot A(-1)) \geq 0$,pentru orice numere reale pozitive a,b şi c.

59.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = -9$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m)) = 0$.
c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a) \cdot A(a) - A(a^2) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 6 & 17 & 13 \\ 6 & 13 & 17 \end{pmatrix}$.

60.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1)) = 1$.
b)Determinaţi numerele reale m ştiind că $\det(A(m)) = 0$.
c)Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a) \cdot A(a) - A(a^2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

61.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 3x^2 - 3x & 6x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(x + y)=A(x) \cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2 + 8) = A(x) \cdot A(2x) \cdot A(3x)$.

62.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 5x^2 + 5x \\ 0 & 1 & 10x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(x + y)=A(x) \cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2 + 3) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$.

63.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 2x+1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 2xy)$ pentru orice numere reale x şi y.
c)Determinaţi numerele reale x,$x\neq-\frac{1}{2}$, pentru care matricea A(x) este egală cu inversa ei.

64.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 3x+1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
b)Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 3xy)$ pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale $x, x \neq -\frac{1}{3}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

65. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a & a \\ a & 3 & 3 \\ a & a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 27$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$.

66. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & -2 \\ a & a & -2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = -8$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(-1) \cdot X = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

67.Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 3^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinați numărul natural n știind că $A(n) \cdot A(1) = A(3)$.
c)Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p) \cdot A(q) = A(pq)$.

68.Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 5^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde n este număr natural.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinați numărul natural n știind că $A(n) \cdot A(1) = A(3)$.
c)Determinați numerele naturale p și q știind că $A(2p) \cdot A(2q) = A(pq + 2)$.

69.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.
a)Arătați că $A(x) + A(-x) = 2A(0)$,pentru orice număr real x.
b)Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$.
c)Arătați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

70.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$.
a)Arătați că $A(x) + A(-x) = 2A(0)$,pentru orice număr real x.
b)Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$.
c)Arătați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

71.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(a)) = (a + 4)(a - 2)^2$,pentru orice număr real a.
b)Calculați inversa matricei $A(-2)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
c)Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 90.

72.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(a)) = -(a + 4)(a - 2)^2$,pentru orice număr real a.
b)Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
c)Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 105.

73.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det(A(2))$.
b)Determinați numerele reale m știind că $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(101)) = -2 \cdot 51^2 \cdot 101^3$.

74.Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 3 & m & m \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & m \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det(A(3))$.
b)Determinați numerele reale m știind că $A(-m) \cdot A(m) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 9 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
c)Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(101)) = -3 \cdot 51^2 \cdot 101^3$.

75.Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \end{vmatrix}$,unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $D(2,3) = -2$.
b)Verificați dacă $D(a, b) = (a - 1)(b - 1)(a - b)$, pentru orice numere reale a și b.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n, n^2)$, unde n este un număr natural nenul.Determinați numărul natural $n, n \geq 3$,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

76.Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \end{vmatrix}$,unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $D(3,2) = 2$.
b)Verificați dacă $D(a, b) = (a - 1)(b - 1)(a - b)$, pentru orice numere reale a și b.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n^2, n)$, unde n este un număr natural nenul.Determinați numărul natural $n, n \geq 3$,pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

77.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det(A(0))$.
b)Determinați valorile reale ale lui a pentru care $8A(a) - (A(a))^2 = 7I_3$.
c)Determinați inversa matricei $A(1)$.

78.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det(A(0))$.
b)Determinați valorile reale ale lui a pentru care $(A(a))^2 - 5A(a) = -4I_3$.
c)Determinați inversa matricei $A(3)$.

79.Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 3 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a)Calculați $D(-1,3)$.
b)Determinați numărul q pentru care matricea $A(3,q)$ are rangul egal cu 2.
c)Arătați că există cel puțin o pereche (x,y)de numere reale,cu $x \neq y$,pentru care $D(x,y) = D(y,x)$.

80.Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y) = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & x & y \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix} \epsilon \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a)Calculați $D(-1,3)$.
b)Determinați numărul q pentru care matricea $A(3,q)$ are rangul egal cu 2.
c)Arătați că există cel puțin o pereche (x,y)de numere reale,cu $x \neq y$,pentru care $D(x,y) = D(y,x)$.

81.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ a & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ x - y + az = 1 \\ ax + 4y + z = 6 \end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
b)Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.
c)Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

82.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 4 & a & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 4y + z = 6 \\ 2x + ay + z = 4 \\ -x + y + az = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
b)Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.
c)Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

83.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2a-5 & a & a-2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
$\begin{cases} (2-a)x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 2 - a \\ (2a-5)x + ay + (a-2)z = -4 \end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
b)Demonstrați că $\det(A(a)) = (a-1)(3-a)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.
c)Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

84.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2-a \\ a & a-2 & 2a-5 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
$\begin{cases} x + ay + (2-a)z = 1 \\ ax + (a-2)y + (2a-5)z = -4 \\ ax + y + z = 2 - a \end{cases}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = -3$.
b)Demonstrați că $\det(A(a)) = (a-1)(3-a)(3a+1)$, pentru orice număr reale a.
c)Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0,y_0,z_0 sunt numere naturale.

85.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & a+1 & a \\ a^2+3 & a^2+2 & a^2+1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
b)Demonstrați că pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă .
c)Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

86.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ a^2+2 & a^2+1 & a^2+3 \\ a+1 & a & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
b)Demonstrați că pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă .
c)Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

87.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ \ln x + 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \epsilon (0, +\infty)$.
a)Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
b)Demonstrați că $A(y)A(x) = A(x)A(y)$, pentru orice $x,y \epsilon (0, +\infty)$.
c)Determinați numărul natural n pentru care $A(3) \cdot A(2) \cdot A(1) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

88.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln x + 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \epsilon (0, +\infty)$.
a)Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
b)Demonstrați că $A(y)A(x) = A(x)A(y)$, pentru orice $x,y \epsilon (0, +\infty)$.
c)Determinați numărul natural n pentru care $A(3) \cdot A(2) \cdot A(1) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

89.Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ ab & bc & ac \end{pmatrix}$ unde a,b și c sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A(0,1,2)) = 2$.
b)Demonstrați că $\det(A(a,b,c)) = (b-a)(a-c)(b-c)$, pentru orice numere reale a,b și c.

c)Demonstrați că,dacă m,n și p sunt numere naturale, cu p<m<n, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m,n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

90.Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\b&a&c\\ac&bc&ab\end{pmatrix}$ unde a,b și c sunt numere reale.

a)Arătați că $\det(A(0,2,1))=2$.

b)Demonstrați că $\det(A(a,b,c))=(a-b)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a,b și c.

c)Demonstrați că,dacă m,n și p sunt numere naturale, cu n<m<p, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m,n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

91.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2&1&-3\\a&1&2\\2a-1&2&-1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații

$\begin{cases}2x+y-3z=2\\ax+y+2z=1\\(2a-1)x+2y-z=a\end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(4))=5$.

b)Determinați numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.

c)Pentru a=3, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

92.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2&1&3\\a&1&-2\\2a-1&2&1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații

$\begin{cases}2x+y+3z=2\\ax+y-2z=1\\(2a-1)x+2y+z=a\end{cases}$ unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(4))=-5$.

b)Determinați numărul real a pentru care matricea A **nu** este inversabilă.

c)Pentru a=3, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0)ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

93.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A(a)=\begin{pmatrix}2-a&0&-3a\\0&2&0\\a&0&2+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0))=8$.

b)Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

c)Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

94.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A(a)=\begin{pmatrix}2-a&0&a\\0&2&0\\-3a&0&2+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det(A(0))=8$.

b)Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

c)Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

95.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&1+\log_3 a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde $a\epsilon(0,+\infty)$.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstrați că, pentru orice $a\epsilon(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

c)Demonstrați că, pentru orice $a\epsilon(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

96.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&0\\1+\log_3 a&0&1\end{pmatrix}$, unde $a\epsilon(0,+\infty)$.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Demonstrați că, pentru orice $a\epsilon(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

c)Demonstrați că, pentru orice $a\epsilon(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

97.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&i&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3-bB$, unde z=a+ib, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

a)Arătați că $\det B=i$.

b)Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

c)Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

98.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3-bB$, unde z=a+ib, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

a)Arătați că $\det B=i$.

b)Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

c)Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

99.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1-x&-x&0\\x&1+x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$,pentru orice număr real x.

c)Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

100.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1-x&x&0\\-x&1+x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$,pentru orice număr real x.

c)Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

101.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2x&1&0\\x^2&-x&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det(A(1))=1$.

b)Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere x și y.

c)Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(2n^2)$.

102.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & x^2\\ 0 & 1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

b)Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere x şi y.

c)Determinaţi numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(2n^2)$.

103.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & x & 1-x\\ 1 & 1-x & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(1))=-2$.

b)Arătaţi că $A(x-1)-A(1)\cdot A(x)=-2I_3$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)\cdot A(1)=3A(1)+2I_3$.

104.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & x & 1-x\\ 1 & 1-x & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det(A(0))=2$.

b)Arătaţi că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

polinomul g=$X^4 - s_1X^3 + s_2X^2 - s_3X + s_4$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4
ecuația $x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x + s_4 = 0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4

Ecuații reciproce de grad trei

Pentru a≠0 avem $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0 \Leftrightarrow$
x+1=0 sau $a(x^2 - x + 1) + bx = 0$
pentru $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
pentru $a(x^2 - x + 1) + bx = 0 \Leftrightarrow ax^2 + (b - a)x + a = 0$ etc.

Subiectul II2 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră polinomul f=$X^3 + mX^2 + 3X + m - 4$, unde m este număr real.
a)Determinați numărul real m, știind că $f(1) = 0$.
b)Pentru m=4, determinați rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul real m, pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
2.Se consideră polinomul f=$X^3 - mX^2 + 3X + 4 - m$, unde m este număr real.
a)Determinați numărul real m, știind că $f(1) = 0$.
b)Pentru m=4, determinați rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul real m, pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
3.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
$x*y=(x - 2021)(y - 2021) + 2021$.
a)Arătați că $x*2021=2021$, pentru orice număr real x.
b)Determinați numerele reale x, știind că $(x * x) * x = x$.
c)Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $m*n=2022$.
4.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
$x*y=(x - 2022)(y - 2022) + 2022$.
a)Arătați că $x*2022=2022$, pentru orice număr real x.
b)Determinați numerele reale x, știind că $(x * x) * x = x$.
c)Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $m*n=2023$.
5.Se consideră polinomul f=$X^3 + X^2 - mX - n$, unde m și n sunt numere reale.
a)Arătați că $f(-1) - 2f(0) + f(1) = 2$, pentru orice numere reale m și n.
b)Determinați numerele reale m și n , știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 - 1$.
c)Demonstrați că $3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
6.Se consideră polinomul f=$X^3 + X^2 - mX + n$, unde m și n sunt numere reale.
a)Arătați că $f(-1) - 2f(0) + f(1) = 2$, pentru orice numere reale m și n.
b)Determinați numerele reale m și n , știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 - 1$.
c)Demonstrați că $3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
7.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului f=$X^3 - mX^2 + mX + 15$, unde m este număr real.
a)Determinați numărul real m, știind că $f(-3) = 0$.
b)Pentru m=−1, determinați rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră a=$\frac{x_1^2-mx_1}{x_2x_3} + \frac{x_2^2-mx_2}{x_1x_3} + \frac{x_3^2-mx_3}{x_1x_2}$.Demonstrați că a$\in[3, +\infty)$,pentru orice număr real m.

8.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-mX^2+mX+2$, unde m este număr real.
a)Determinați numărul real m, știind că $f(-2)=0$.
b)Pentru $m=-1$, determinați rădăcinile polinomului f .
c)Se consideră $a=\frac{x_1^2-mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2-mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2-mx_3}{x_1x_2}$.Demonstrați că $a\in[3,+\infty)$,pentru orice număr real m.
9.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru,
$x*y=\frac{1}{5}xy+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{5}{4}$.
a)Demonstrați că $x*y=\frac{1}{5}\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(y+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „*” să fie natural.
10.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru,
$x*y=\frac{1}{5}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{15}{4}$.
a)Demonstrați că $x*y=\frac{1}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „*” să fie natural.
11.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=\sqrt{x^2y^2+3x^2+3y^2+6}$.
a)Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)-3}$,pentru orice numere reale x și y .
b)Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=3$.
c)Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{3\circ 3\circ\ldots\circ 3}_{3 \text{ de n ori}}$ **nu** este natural.
12.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.
a)Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+5)(y^2+5)-5}$,pentru orice numere reale x și y .
b)Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=5$.
c)Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{5\circ 5\circ\ldots\circ 5}_{5 \text{ de n ori}}$ **nu** este natural.
13.Se consideră polinomul $f=X^3-X^2-4X+a$, unde a este număr real.
a)Arătați că $f(1)-f(-1)=-6$.
b)Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X+2.
c)Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomul f sunt numere întregi.
14.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-X+a$, unde a este număr real.
a)Arătați că $f(1)-f(-1)=0$.
b)Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-1$.
c)Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomul f sunt numere întregi.
15.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3xy+2x+2y+\frac{2}{3}$.
a)Demonstrați că $x*y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{3}$.
c)Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{2}{3}$.

16.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy+3x+3y+\frac{6}{5}$.
a)Demonstrați că $x*y=5\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(y+\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=0$.
c)Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{5}$.
17.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=\frac{1}{7}xy-(x+y)+14$.
a)Demonstrați că $x*y=\frac{1}{7}(x-7)(y-7)+7$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\leq\frac{50}{7}$.
c)Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.
18.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=\frac{1}{9}xy-(x+y)+16$.
a)Demonstrați că $x*y=\frac{1}{8}(x-8)(y-8)+8$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\leq\frac{65}{8}$.
c)Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2020$.
19.Se consideră polinomul $f=-nX^n-X^2+nX+1$, unde n este număr natural,$n\geq 3$.
a)Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n,$n\geq 3$.
b)Arătați că, dacă n este număr natural impar,$n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
c)Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.
20.Se consideră polinomul $f=-nX^n+X^2+nX-1$, unde n este număr natural,$n\geq 3$.
a)Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n,$n\geq 3$.
b)Arătați că, dacă n este număr natural impar,$n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
c)Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.
21.Pe mulțimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+\hat{4}x+\hat{4}y+\widehat{16}$.
a)Demonstrați că $x\circ y=(x+\hat{4})(y+\hat{4})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.
b)Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.
c)Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{16}\}$ pentru orice $a\circ b=\hat{0}$.
22.Pe mulțimea $\mathbb{Z}_{30}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{29}\}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.
a)Demonstrați că $x\circ y=(x+\hat{3})(y+\hat{3})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{30}$.
b)Determinați $a\in\mathbb{Z}_{30}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{30}$.
c)Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{30}\setminus\{\widehat{27}\}$ pentru orice $a\circ b=\hat{0}$.
23.Se consideră polinomul $f=X^4-aX^2+4$, unde a este număr real.
a)Determinați numărul real a, știind că $f(2)=0$.
b)Pentru a=5, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.
c)Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.
24.Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+6$, unde a este număr real.
a)Determinați numărul real a, știind că $f(3)=0$.
b)Pentru $a=-7$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-6.
c)Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.
25.Se consideră polinomul $f=X^3+(m+2)X^2+(m^2+2)X+1$,unde m este număr real.

a)Arătați că $f(0) = 1$,pentru orice număr real m.
b)Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.
26.Se consideră polinomul $f=X^3 - (m+6)X^2 + (m^2+18)X - 27$,unde m este număr real.
a)Arătați că $f(0) = -27$,pentru orice număr real m.
b)Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-3)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.
27.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 + aX - 1$, unde a este număr real.
a)Determinați numărul real a,știind că $f(-1) = 0$.
b)Pentru a=2,calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 - X + 1$.
c)Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.
28.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 + aX - 8$, unde a este număr real.
a)Determinați numărul real a,știind că $f(-2) = 0$.
b)Pentru a=4,calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.
29.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y=xy+8x+8y+56$.
a)Arătați că $x \circ y=(x+8)(y+8) - 8$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x,știind că $x \circ x=x$.
c)Determinați numărul real a,știind că $2018^a \circ (-7) = 1$.
30.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y=xy-7x-7y+56$.
a)Arătați că $x \circ y=(x-7)(y-7) + 7$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x,știind că $x \circ x=x$.
c)Determinați numărul real a,știind că $2017^a \circ 8 = 1$.
31.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătați că $x*y=5(x+1)(y+1) - 1$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstrați că,dacă a,b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=24$,atunci numerele a,b și c sunt egale.
32.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy-7x-7y+8$.
a)Arătați că $x*y=7(x-1)(y-1) + 1$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
c)Demonstrați că,dacă a,b și c sunt numere naturale nenule astfel încât $a*b*c=50$,atunci numerele a,b și c sunt egale.
33.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + 32X + 8$,unde a este număr real.
a)Determinați numărul real a,știind că $f(-1) = 0$.
b)Pentru a=32,determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 30X + 4$.
c)Demonstrați că,dacă $a \in (-8,8)$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
34.Se consideră polinomul $f=X^3 + aX^2 + 17X + 10$,unde a este număr real.
a)Determinați numărul real a,știind că $f(3) = 0$.
b)Pentru a=8,determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$.
c)Demonstrați că,dacă $a \in (-\sqrt{34}, \sqrt{34})$, atunci polinomul f are o singură rădăcină reală.
35.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-6xy+18x+18y-51$.
a)Arătați că $x*y=3-6(x-3)(y-3)$,pentru orice numere reale x și y.

b)Determinați numerele naturale n,știind că $(n*n)*n = n$.
c)Arătați că,dacă $a*a=b$ și $b*b=a$,atunci a=b=3 sau $a=b=\frac{17}{6}$.
36.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+20x+20y-76$.
a)Arătați că $x*y=4-5(x-4)(y-4)$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele naturale n,știind că $(n*n)*n = n$.
c)Arătați că,dacă $a*a=b$ și $b*b=a$,atunci a=b=4 sau $a=b=\frac{19}{5}$.
37.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y=3xy-3x-3y+4$.
a)Arătați că $x \circ y=3(x-1)(y-1) + 1$,pentru orice numere reale x și y.
b)Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$.Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de2016 ori a}} = 3^{2015} + 1$.
38.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătați că $x \circ y=5(x+1)(y+1) - 1$,pentru orice numere reale x și y.
b)Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 5$.Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de2019 ori a}} = 5^{2018} - 1$.
39. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+5x+5y-20$.
a) Arătați că $x*y=5-(x-5)(y-5)$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x,pentru care $x*x=1$.
c)Demonstrați că,dacă m,n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=5$,atunci produsul numerelor m,n și p este divizibil cu 5.
40. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy-3x-3y-6$.
a) Arătați că $x*y=3-(x+3)(y+3)$,pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x,pentru care $x*x=-12$.
c)Demonstrați că,dacă m,n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=3$,atunci produsul numerelor m,n și p este divizibil cu 3.
41. Se consideră polinomul $f=X^4 - mX^2 + 2$,unde m este număr real.
a)Determinați numărul real m,știind că $f(1) = 0$.
b)Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=3,descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
42. Se consideră polinomul $f=X^4 + mX^2 + 4$,unde m este număr real.
a)Determinați numărul real m,știind că $f(1) = 0$.
b)Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru m=−5,descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
43.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+6x+6y-15$.
a)Arătați că $x*y=-2(x-3)(y-3) + 3$,pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=3$.
c)Determinați numerele naturale m și n,pentru care $m*n=37$.
44.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-4xy+16x+16y-60$.

a)Arătați că $x*y=-4(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12=4$.
c)Determinați numerele naturale m și n,pentru care $m*n=80$.
45.Se consideră polinomul $f=X^3-6X+a$,unde a este număr real.
a)Arătați că $f(0)=a$.
b)Determinați numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016+5a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.
46.Se consideră polinomul $f=X^3-7X+a$,unde a este număr real.
a)Arătați că $f(0)=a$.
b)Determinați numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2020-7a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul real a știind că polinomul f are cel puțin două rădăcini întregi.
47.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.
a)Arătați că $x*y=(x-6)(y-6)+6$,pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $1*2*3*\ldots*2017$.
c)Determinați numerele naturale a,b și c,știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.
48.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+4x+4y+12$.
a)Arătați că $x*y=(x+4)(y+4)-4$,pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $(-2018)*(-2017)*(-2016)*\ldots*2018$.
c)Determinați numerele naturale a,b și c,știind că $a<b<c$ și $a*b*c=116$.
49.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+X-m$, unde m este număr real.
a)Arătați că $f(0)=-m$.
b)Pentru m=1,arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul natural prim m,știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.
50.Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+m$, unde m este număr real.
a)Arătați că $f(0)=m$.
b)Pentru m=5,arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=25x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numărul natural prim m,știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.
51.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x-5)(y-5)+5$.
a)Arătați că $(-5)\circ 5=5$.
b)Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=37$.
c)Calculați $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2017$.
52.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=\frac{1}{2}(x+3)(y+3)-3$.
a)Arătați că $(-3)\circ 3=-3$.
b)Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=5$.
c)Calculați $(-1)\circ(-2)\circ(-3)\circ\ldots\circ(-2018)$.
53.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+2X-m$,unde m este număr real.
a)Arătați că $f(0)=-m$.
b)Pentru m=1,demonstrați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$,unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

54.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+8X+m$,unde m este număr real.
a)Arătați că $f(0)=m$.
b)Pentru m=−16,demonstrați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=2$,unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
55.Se consideră polinomul $f=X^3-mX-3$,unde m este număr real.
a)Pentru m=−2,arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați numărul real m,știind că polinomul f este divizibil cu $X-1$.
c)Arătați că,pentru orice număr real strict negativ m,polinomul f are două rădăcini de module egale.
56.Se consideră polinomul $f=-X^3-mX+3$,unde m este număr real.
a)Pentru m=2,arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați numărul real m,știind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.
c)Arătați că,pentru orice număr real strict pozitiv m,polinomul f are două rădăcini de module egale.
57.Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy-4x-4y+20$.
a)Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$,pentru orice numere întregi x și y.
b)Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „*”.
c)Calculați $d_1*d_2*\ldots*d_{42}$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_{42}$ sunt divizorii naturali ai lui 2016.
58.Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy+5x+5y+20$.
a)Arătați că $x*y=(x+5)(y+5)-5$,pentru orice numere întregi x și y.
b)Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „*”.
c)Calculați $d_1*d_2*\ldots*d_{16}$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_{16}$ sunt divizorii întregi ai lui 2015.
59. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.
a)Calculați $1*5$.
b)Arătați că $x*y=5-(x-5)(y-5)$ pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2018\text{ ori}}=x$.
60. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2x+2y-xy-2$.
a)Calculați $1*2$.
b)Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$ pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2017\text{ ori}}=x$.
61.Se consideră polinomul $f=X^3-2x^2-aX-3$,unde a este număr real.
a)Arătați că $f(3)=3(2-a)$.
b)Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin X^2+X+1.
c)Pentru a=2,rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x)=0$.
62.Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+aX-4$,unde a este număr real.
a)Arătați că $f(2)=3(a-16)$.
b)Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.
c)Pentru a=5,rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x)=0$.
63.Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.
a)Calculați $f(0)$.
b)Determinați numărul real a știind că $1-i$ este rădăcină a polinomului f.
c)Pentru a=3,arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$,unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

64.Se consideră polinomul f=$X^3 - X^2 - 7X + a$, unde a este număr real.
a)Calculați f(0).
b)Determinați numărul real a știind că 2+i este rădăcină a polinomului f.
c)Pentru a=15,arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -23$,unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
65.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului f=$X^3 - 6X^2 + 11X + m$,unde m este număr real.
a)Calculați f(1).
b)Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$.
c)Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 36$.
66.Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului f=$X^3 + 2X^2 - 5X + m$,unde m este număr real.
a)Calculați f(2).
b)Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$.
c)Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -20$.
67.Se consideră polinomul f=$X^3 + X^2 - 4X + 3$.
a)Calculați f(0).
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 9$.
c)Arătați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 26$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
68.Se consideră polinomul f=$X^3 - X^2 + 3X - 4$.
a)Calculați f(0).
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 4$.
c)Arătați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -16$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
69.Se consideră polinomul f=$X^3 + 2mX^2 + 2mX + 1$,unde m este un număr real.
a)Calculați f(−1).
b)Determinați numărul real m știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
c)Determinați valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.
70.Se consideră polinomul f=$2X^3 - mX^2 - mX + 2$,unde m este un număr real.
a)Calculați f(−1).
b)Determinați numărul real m știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.
c)Determinați valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.
71.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=3xy−6x−6y+14. Legea „∗"este asociativă și are element neutru.
a)Arătați că x∗y=$3(x - 2)(y - 2) + 2$,pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $\frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \frac{3}{1007} * \dots * \frac{2016}{1007} * \frac{2017}{1007} * \frac{2018}{1007}$.
c)Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „∗".
72.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=3xy−9x−9y+30. Legea „∗"este asociativă și are element neutru.
a)Arătați că x∗y=$3(x - 3)(y - 3) + 3$,pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $\frac{1}{673} * \frac{2}{673} * \frac{3}{673} * \dots * \frac{2019}{673}$.
c)Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „∗".
73.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de x∘y=xy−5x−5y+30.
a)Calculați 4∘5.
b)Arătați că x∘y=$(x - 5)(y - 5) + 5$,pentru orice numere reale x și y.

c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2017 \text{ ori}} = 6$.
74.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de x∘y=xy−6x−6y+42.
a)Calculați 5∘6.
b)Arătați că x∘y=$(x - 6)(y - 6) + 6$,pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2018 \text{ ori}} = 7$.
75. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului f =$X^3 + 2X^2 - 5X - m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=3,arătați că $f(3) = 27$.
b)Determinați numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relația $x_1 + x_2 = x_3$.
c)Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 10(x_1 + x_2 + x_3)$,arătați că f se divide cu X+3.
76. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului f =$X^3 + 4X^2 + X - m$, unde m este număr real.
a)Pentru m=4,arătați că $f(-2) = -6$.
b)Determinați numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relația $x_1 + x_2 = x_3$.
c)Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3)$,arătați că f se divide cu X−3.
77.Se consideră polinomul f=$X^3 - mX^2 + 4X - 3$,unde m este număr real.
a)Calculați $f(3) - f(-3)$.
b)Determinați restul împărțirii lui f la X+3,știind că restul împărțirii polinomului f la X−3 este egal cu 9.
c)Determinați numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -7$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
78.Se consideră polinomul f=$X^3 - mX^2 + 2X - 4$,unde m este număr real.
a)Calculați $f(2) - f(-2)$.
b)Determinați restul împărțirii lui f la X−3,știind că restul împărțirii polinomului f la X+3 este egal cu 8.
c)Determinați numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
79.Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din ℂ ale polinomului f=$X^3 + 2X - m$,unde m este un număr real.
a)Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului f(X) la X−2 să fie egal cu 10.
b)Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg,pentru orice m∈ℝ.
c)În cazul m=−2 determinați patru numere întregi a,b,c,d,cu a>0,astfel încât polinomul g=$aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.
80.Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din ℂ ale polinomului f=$X^3 - 3X + m$,unde m este un număr real.
a)Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului f(X) la X+2 să fie egal cu 4.
b)Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg,pentru orice m∈ℝ.
c)În cazul m=3 determinați patru numere întregi a,b,c,d,cu a>0,astfel încât polinomul g=$aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.
81.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y= $xy - \frac{1}{3}(x + y) + \frac{4}{9}$. Legea de compoziție este asociativă și are elemental neutru e=$\frac{4}{3}$.

a)Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.
c)Arătați că **nu** există numere întregi x și y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „∗” .
82.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{4}(x+y)+\frac{5}{16}$. Legea de compoziție este asociativă și are elemental neutru $e=\frac{5}{4}$.
a)Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{16}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.
c)Arătați că **nu** există numere întregi x și y,astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „∗” .
83.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_5(5^x+5^y)$.
a)Arătați că $1*1=1+\log_5 2$.
b)Demonstrați că legea de compoziție „∗” este comutativă.
c)Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=2+\log_5 3$.
84.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_6(6^x+6^y)$.
a)Arătați că $2*2=2+\log_6 2$.
b)Demonstrați că legea de compoziție „∗” este comutativă.
c)Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=1+\log_6 3$.
85.Pe mulțimea $A=[2,+\infty)$se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-8x^3-8y^3+128}$.
a)Arătați că $1*2020=1$.
b)Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3-8)(y^3-8)+8}$.
c)Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.
86.Pe mulțimea $A=[-1,+\infty)$se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^3y^3+x^3+y^3-26}$.
a)Arătați că $(-1)*2020=-1$.
b)Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{27}(x^3+1)(y^3+1)-1}$.
c)Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.
87. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-6(x+y)+a$, unde a este număr real.
a)Pentru a=21, arătați că $1*3=0$.
b)Pentru a=42,arătați că e=7 este elementul neutru al legii de compoziție „∗".
c)Demonstrați că, dacă $a\in[42,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[6,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „∗” .
88. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-7(x+y)+a$, unde a este număr real.
a)Pentru a=28, arătați că $1*3=3$.
b)Pentru a=56,arătați că e=8 este elementul neutru al legii de compoziție „∗".
c)Demonstrați că, dacă $a\in[56,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[7,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „∗” .
89.În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+\hat{2}X^3+bX+a$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

a)Pentru $a=\hat{2}$ și $b=\hat{1}$, arătați că $f(\hat{2})+f(\hat{0})=\hat{2}$.
b)Determinați perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.
c)Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.
90.În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+\hat{2}X^3+aX+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.
a)Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.
b)Determinați perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.
c)Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.
91.Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_4 y}}$.
a)Arătați că $9*4=3$.
b)Arătați că e=16 este elementul neutru al legii de compoziție „∗” .
c)Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „∗” .
92.Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_5 y}}$.
a)Arătați că $4*5=2$.
b)Arătați că e=25 este elementul neutru al legii de compoziție „∗” .
c)Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „∗” .
93.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$.
a)Arătați că $2*0=0$.
b)Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=a$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*(x^2+1)*(-2x)=-10$.
94.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.
a)Arătați că $2*0=0$.
b)Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=a$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*(x^2+1)*(-2x)=-10$.
95.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+m(x+y)+m(m-1)$, unde $m\in(0,+\infty)$.
a)Pentru m=1, arătați că $3\circ3=15$.
b)Demonstrați că, dacă $2\circ1=10$, atunci $2\circ3=18$.
c)Determinați numărul real x, știind că $(-mx^2)\circ(mx^3)=-m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$
96.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-m(x+y)+m(m+1)$, unde $m\in(0,+\infty)$.
a)Pentru m=1, arătați că $3\circ3=5$.
b)Demonstrați că, dacă $2\circ1=10$, atunci $2\circ3=6$.
c)Determinați numărul real x, știind că $(-mx^2)\circ(mx^3)=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$
97.În mulțimea $M=[1,+\infty)$, se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_4(4^{x+y}-4^{x+1}-4^{y+1}+20)$.
a)Arătați că $x*y=\log_4\left((4^x-4)(4^y-4)+4\right)$, pentru orice $x,y\in M$.
b)Determinați elementul neutru al legii de compoziție „∗”.
c)Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.
98.În mulțimea $M=[1,+\infty)$, se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_5(5^{x+y}-5^{x+1}-5^{y+1}+30)$.
a)Arătați că $x*y=\log_5\left((5^x-5)(5^y-5)+5\right)$, pentru orice $x,y\in M$.
b)Determinați elementul neutru al legii de compoziție „∗”.
c)Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

99.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-1$.
a)Arătați că $3*0=2$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=10$.
c)Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn+2$.
100.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)+1$.
a)Arătați că $0*2=9$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=12$.
c)Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn+4$.
101.Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{4x}{y+4}+\frac{4y}{x+4}$.
a)Arătați că $1*0=1$.
b)Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
c)Determinați $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{16}{x}=x$.
102.Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{5x}{y+5}+\frac{5y}{x+5}$.
a)Arătați că $1*0=1$.
b)Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
c)Determinați $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{25}{x}=x$.
103.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{(x+y)xy}{xy+1}$.
a)Arătați că $4*1=4$.
b)Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
c)Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\frac{1}{n}*\frac{1}{m}=(n*m)\cdot\frac{1}{16}$.
104.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+1}$.
a)Arătați că $1*4=4$.
b)Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
c)Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\frac{1}{m}*\frac{1}{n}=(m*n)\cdot\frac{1}{16}$.

Limite de şiruri

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{cn+d}=\frac{b}{\infty}=0$,pentru $c\neq0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an+b}{cn+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(a+\frac{b}{n}\right)}{n\left(c+\frac{d}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\left(c+\frac{d}{n}\right)}=\frac{a}{c}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{n^2\left(d+\frac{e}{n}+\frac{f}{n^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}{d+\frac{e}{n}+\frac{f}{n^2}}=\frac{a}{d}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an+b}{\sqrt{n^2+an+b}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(a+\frac{b}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1}=\frac{a}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$,dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Tabel de derivate

$c'=0$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2x}$
$x'=1$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)'=2x$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^3)'=3x^2$	$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sin x)'=\cos x$	$(arctgx)'=\frac{1}{x^2+1}$
$(x^4)'=4x^3$	$(e^x)'=e^x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(arcctgx)'=-\frac{1}{x^2+1}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(e^{-x})'=-e^{-x}$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2x}$	

Reguli de derivare

$(f+g)'=f'+g'$ $(f-g)'=f'-g'$ $(\alpha f)'=\alpha f'$ $(fg)'=f'g+fg'$

$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$ $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$

Derivate de ordin 1 şi 2

1.Calculați $f'(x)$ pentru următoarele funcții:
$f(x)=2016$, $f(x)=6\sqrt{2}$, $f(x)=tg4$, $f(x)=x^4$, $f(x)=x^{100}$, $f(x)=x^{2015}$, $f(x)=x^9$,
$f(x)=x^{900}$, $f(x)=x^{2017}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $f(x)=\frac{1}{x^8}$, $f(x)=\frac{1}{x^{2014}}$, $f(x)=\log_4 x$,
$f(x)=\log_5 x$, $f(x)=\log_{0,3}x$, $f(x)=5^x$, $f(x)=6^x$, $f(x)=2014^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^x$,
$f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=\log_3(5x)+\log_3\frac{1}{5}$, $f(x)=\log_6(4x^2)-\log_6(4x)$,
$f(x)=\log_2(3x^2)+\log_2\frac{1}{3x}$, $f(x)=5^x$, $f(x)=2016^x$, $f(x)=5^{2x}$, $f(x)=e^{3x}$, $f(x)=x^3+3^x$,
$f(x)=x^3+4x+1$, $f(x)=x^3-3x+2$, $f(x)=x^3+2x^2-5$, $f(x)=3x-x^5$,
$f(x)=2-3x+x^2-5x^3$, $f(x)=6x-x^4$, $f(x)=x+3\sqrt{x}$, $f(x)=x^4+\sin x+\cos x$,
$f(x)=\cos x-\sin x$, $f(x)=x-\cos x+\sin x$, $f(x)=x^2+5\sqrt{x}$, $f(x)=x-3\sqrt{x}$,
$f(x)=5x^3+\ln x$, $f(x)=5^x+2^x-x$, $f(x)=3^x+4^x-x^2$, $f(x)=4\cos x+3\sin x-x$,

$f(x) = 5\sin x - 6\cos x + \sqrt{2}, f(x) = x^4 + \log_4 x + 2^x, f(x) = x^3 + \log_3 x - \sin x,$

$f(x) = x^4 + \log_4 x + \cos x, f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{3} + \operatorname{tg} x, f(x) = \sqrt[3]{x} - 3^2 + \operatorname{ctg} x,$

$f(x) = (x-2)^2 + (x+2)^2, f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3} + \log_{0,6} x, f(x) = \log_4 x^4 + \log_3 x^6,$

$f(x) = 3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x, f(x) = 4\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x, f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}x, f(x) = 3^{x+1} + 2^{x-1},$

$f(x) = 5\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} x + 3^x, f(x) = 1^x + 2^x + e^x + 3^x, f(x) = \log_5 x^5 - \log_{\frac{1}{2}} x^3,$

$f(x) = 5^{x+1} + 3^{x-1}, f(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}, f(x) = 3^x + x^3 + \sqrt[3]{x} + \log_3 x,$

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 10, f(x) = (1-3x)(1+6x), f(x) = \sin 2x, f(x) = (1+x)\ln x,$

$f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\ln x, f(x) = (2\sin x + 3)(1 - 5\cos x), f(x) = (1-3x^2)(1-2\sin x),$

$f(x) = \left(-\frac{3}{x} + 4\right)(2\ln x - 3), f(x) = (1+x)(2+\ln x)(3\sin x - 5), f(x) = 3x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x,$

$f(x) = x\cos x - 5x\ln x + 3\sin x - x^2 + 2x, f(x) = (3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\sin x + 5\sin x\ln x - x^3 + 4x + 5,$

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 6, f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, f(x) = x\ln x, f(x) = x\sin x,$

$f(x) = x\cos x, f(x) = x^2\sin x, f(x) = \sqrt{x}\sin x + 5\cos x - \frac{3}{x} + 9, f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sin x, f(x) = \frac{1}{x+2},$

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(1 + 2x + 3x^2), f(x) = \frac{x+1}{x-1}, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = \frac{x}{x^2+1},$

$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3+1}, f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+x+1}, f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}, f(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x},$

$f(x) = \frac{\ln x + x^2}{\ln x - x^2}, f(x) = \frac{3\sin x}{3\cos x - 5}, f(x) = \frac{-\sin x + 3\cos x}{\sin x + 4}, f(x) = \frac{2\sin x - 5\cos x}{3\sin x + 4}, f(x) = \frac{5x+3}{3-5x}, f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4},$

$f(x) = (5x+6)\ln x, f(x) = (5x-6)e^x, f(x) = xe^x\ln x, f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \ln x,$

$f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \cos x, f(x) = \frac{\cos x + 3}{\cos x - 3}, f(x) = \frac{x+e^x}{x-e^x}, f(x) = 2x^3 + 4x + 6, f(x) = \frac{1}{x} - x,$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5, f(x) = x - \frac{1}{x}, f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, f(x) = 2x^3 - 6x + 1,$

$f(x) = x^3 - 3x + 1, f(x) = \frac{x-2}{x+2}, f(x) = x + \frac{4}{x-2}, f(x) = \frac{3x}{x^2+1}, f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x-1}{x-2},$

$f(x) = (x-1)e^x, f(x) = x^2 - \ln x, f(x) = x^2 - x, f(x) = x^3 - 3x + 7, f(x) = e^x - x,$

$f(x) = \sqrt{x} - 1, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = xe^x, f(x) = (x+2)^3, f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}, f(x) = x\ln x,$

$f(x) = 2x^3 - 4x + 6, f(x) = \frac{1}{x} + x, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, f(x) = x + \frac{1}{x}, f(x) = x^4 + 2x^2 + 1,$

$f(x) = 2x^3 + 6x + 1, f(x) = x^3 + 3x + 1, f(x) = \frac{x+2}{x-2}, f(x) = x - \frac{4}{x-2}, f(x) = \frac{3x}{x^2-1},$

$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = x^2 + \ln x, f(x) = x^2 + x,$

$f(x) = x^3 + 3x + 7, f(x) = e^x + x, f(x) = \sqrt{x} + 1, f(x) = \frac{x-1}{x}, f(x) = 2xe^x, f(x) = (x+3)^3,$

$f(x) = x - 10 + \frac{11}{x}, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x^3 + x^2 - x + 1, f(x) = x^3 - 3x,$

$f(x) = -x^3 + 3x + 2, f(x) = x^3 - 12x, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = x^3 - x^2 + x + 1,$

$f(x) = x^3 + 3x, f(x) = -x^3 - 3x + 2, f(x) = -x^3 + 12x, f(x) = \frac{x-1}{x}, f(x) = -\frac{1}{x},$

$f(x) = e^x - x - 1, f(x) = 3e^x + x^2, f(x) = e^x - \ln x + x, f(x) = x^4 - 8x^2 + 16,$

$f(x) = (x+1)e^x, f(x) = xe^x - e^x + 1, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = \frac{x+\ln x}{x}, f(x) = x\ln x - x + 1,$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}, f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}, f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, f(x) = \ln(x+1) - \ln x,$

$f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9), f(x) = \frac{2}{x} + \ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = x - \ln x, f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1},$

$f(x) = x + \ln x, f(x) = \sqrt{x} - \ln x, f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+2}, f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}, f(x) = -\frac{4}{x^2+1},$

$f(x) = e^x - \frac{1}{x}, f(x) = \ln x + e^x, f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x, f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}, f(x) = e^x - x,$

$f(x) = x^2e^x, f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}, f(x) = \sqrt{x^2+3}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}, f(x) = \sqrt{x^2+4},$

$f(x) = e^x + x - 1, f(x) = 3e^x - x^2, f(x) = e^x + \ln x - x, f(x) = x^4 + 8x^2 - 16,$

$f(x) = (x-1)e^x, f(x) = xe^x + e^x + 1, f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = \frac{x-\ln x}{x}, f(x) = x\ln x + x - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}, f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, f(x) = \ln(x+1) + \ln x,$

$f(x) = e^x(x^2 + 6x + 9), f(x) = \frac{2}{x} - \ln x, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x + 2\ln x, f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+1},$

$f(x) = x - \ln x, f(x) = \sqrt{x} + \ln x, f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2}, f(x) = \frac{x-1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}, f(x) = -\frac{4}{x^2-1},$

$f(x) = e^x + \frac{1}{x}, f(x) = \ln x - e^x, f(x) = x^3 - x^2 + x - 3^x, f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}, f(x) = e^x + x,$

$f(x) = x^3e^x, f(x) = x^2 - \frac{2}{x}, f(x) = \frac{e^x}{1-x}, f(x) = \sqrt{x^2-3}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = \sqrt{x^2-4},$

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 3, f(x) = 4x^3 - 7x + 2, f(x) = x^3 + 3x + 2, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1,$

$f(x) = \frac{x-3}{x+3}, f(x) = x + \frac{5}{x-3}, f(x) = \frac{6x}{x^2+1}, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, f(x) = \ln x - x + \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x-2}{x-3},$

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = (x-2)e^x, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = x^2 + \ln x, f(x) = x^2 - 3x,$

$f(x) = x^2 + x, f(x) = x^4 - x^3, f(x) = x^3 + 3x - 5, f(x) = e^x + x, f(x) = \sqrt{x} + 1, f(x) = \frac{x+2}{x},$

$f(x) = \frac{x-2}{x}, f(x) = xe^x, f(x) = (x+3)^2, f(x) = (x-2)^3, f(x) = x + 11 - \frac{6}{x}, f(x) = x^4\ln x,$

$f(x) = \sqrt{x} + 4\ln x, f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}, f(x) = \frac{x-2}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, f(x) = e^x + \frac{1}{x}, f(x) = e^x - \frac{1}{x} + x,$

$f(x) = \ln x + e^x, f(x) = x^3 - x^2 + x - 3^x, f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}, f(x) = e^x - 2x, f(x) = x^3e^x,$

$f(x) = x^2 + \frac{3}{x}, f(x) = \frac{e^x}{x+2}, f(x) = \sqrt{x^2+5}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,$

$f(x) = 2x + \frac{1}{x}, f(x) = x^4 - 6x^2 + 9, f(x) = 4x^3 - 7x + 2, f(x) = x^3 - 6x + 3, f(x) = x + \frac{5}{x-3},$

$f(x) = \frac{x-4}{x+4}, f(x) = \ln x - \frac{3}{x}, f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, f(x) = (x-2)e^x, f(x) = \frac{x+2}{x+1}, f(x) = e^x(x+2),$

$f(x) = x^4e^x, f(x) = x^{2016}e^x, f(x) = x^3 - \ln x, f(x) = x^2 - x + 3, f(x) = e^x - x^2 + 3x,$

$f(x) = x^3 - 3x + 6, f(x) = \frac{x+2}{x}, f(x) = \sqrt{x} - 4, f(x) = x\sqrt{x}, f(x) = (x+4)^3, f(x) = (x+5)^3,$

$f(x) = x^{2017}e^x, f(x) = x^5\ln x, f(x) = (x+2)\ln x, f(x) = x + 11 - \frac{12}{x}, f(x) = x - \frac{1}{x},$

$f(x) = x + \frac{1}{x}, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(x) = e^x - \frac{1}{x}, f(x) = x\operatorname{tg} x, f(x) = e^x\ln x, f(x) = \frac{e^x}{\ln x}, f(x) = \frac{e^x}{x^2},$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = e^x - e^{-x}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f(x) = x + e^{-x}, f(x) = x^{2008} - 2008(x-1) - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}, f(x) = e^x + x^2, f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}, f(x) = e^x(2x^2 + 4x + 5), f(x) = -x^2 + x,$

$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, f(x) = x - 2\ln x, f(x) = \frac{e^x}{x+1}, f(x) = \frac{\ln x}{x}, f(x) = e^{-x} - 1, f(x) = -e^{-x},$

$f(x) = e^x - 1, f(x) = \frac{e^x}{x^2}, f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, f(x) = \frac{e^x}{x+2}, f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1},$

$f(x) = x - e\ln x, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x, f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x, f(x) = e^x - x, f(x) = e^x - x - 1,$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}, f(x) = \ln x + 7, f(x) = x - \ln x, f(x) = x^2 + e^x, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x - \frac{1}{e^x},$

$f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x+e^x}, f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x, f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x, f(x) = \frac{x-\ln x}{x+\ln x},$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x) = \ln x - x + 1, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, f(x) = x^{2008} + 2008^x,$

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x) = x^2 + e^x, f(x) = (x-1)e^x, f(x) = xe^x, f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}, f(x) = x - 2\ln x,$
$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, f(x) = (x-2)\ln x, f(x) = 1 + \sqrt{x}, f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f(x) = \sqrt{x} + x, f(x) = x\sqrt[3]{x},$
$f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12, f(x) = (x^2-1)\ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = 3^x + 1,$
$f(x) = e^x - x - 1, f(x) = e^x - 1, f(x) = e^x - ex - 1, f(x) = x - \ln x, f(x) = \frac{x+1}{x-1},$
$f(x) = 2^x - x\ln 2, f(x) = \frac{x+1}{x-3}, f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, f(x) = \frac{2x+3}{x+2},$
$f(x) = x + \frac{3}{2}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, f(x) = x^3 + 3x,$
$f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}, f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = \ln x + 8, f(x) = \frac{3}{x}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}, f(x) = \frac{2x+3}{x^2+2},$
$f(x) = (x-1)(x-2), f(x) = \frac{1}{x^2+1}, f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f(x) = (x-3)\ln x, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1},$
$f(x) = 2^x + 3^x, f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1},$
$f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, f(x) = (x-3)\sqrt{x}, f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \frac{x^2-x+1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+1}{x},$
$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}, f(x) = x\ln x - x, f(x) = x^3 - 3x + 1, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x,$
$f(x) = x^2 - x - \ln x, f(x) = \frac{e^x}{x}, f(x) = (x^2+1)e^x - 1, f(x) = xe^x, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = \frac{x^3}{\ln x},$
$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x) = \frac{e^x}{x-1}, f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2},$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, f(x) = x^3 + 3x, f(x) = \ln x + \frac{x^2}{x},$
$f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}, f(x) = (x-1)(x-2), f(x) = (x-3)\ln x,$
$f(x) = x^{2016} + 2016x, f(x) = 2016^x - x^{2016}, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = e^x + e^{-x}, f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}},$
$f(x) = x - e^{-x}, f(x) = x^{2017} + 2017(x-1) - 1,$
$f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2}, f(x) = e^x - x^2, f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}, f(x) = e^x(2x^2 - 4x + 5), f(x) = x^2 - x,$
$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}, f(x) = x + 2\ln x, f(x) = \frac{e^x}{x-1}, f(x) = \frac{\ln x}{-x}, f(x) = e^{-x} + 1, f(x) = -e^{-x} + x,$
$f(x) = e^x + 1, f(x) = \frac{-e^x}{x^2}, f(x) = (x+5)^2 + (x-5)^2, f(x) = \frac{-\ln x}{x^2}, f(x) = \frac{e^x}{x-2}, f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1},$
$f(x) = x + e\ln x, f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x, f(x) = \frac{x^4}{4} + \ln x, f(x) = e^x + x, f(x) = e^x - x + 1,$
$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, f(x) = \ln x - 7, f(x) = x + \ln x, f(x) = x^2 - e^x, f(x) = x^{2018}\ln x, f(x) = x + \frac{1}{e^x},$
$f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x-e^x}, f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x, f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, f(x) = (x^2 + 3x - 3)e^x, f(x) = \frac{x+\ln x}{x-\ln x},$
$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, f(x) = \ln x + x + 1, f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, f(x) = \frac{2x+1}{x+1}, f(x) = x^{2017} - 2017^x,$
$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, f(x) = x^2 - e^x, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = 3x - xe^x, f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}, f(x) = x + 2\ln x,$
$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}, f(x) = (x+2)\ln x, f(x) = 1 - \sqrt{x}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, f(x) = \sqrt{x} - x, f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x},$
$f(x) = x^4 + 6x^2 - 18x + 12, f(x) = (x^2+1)\ln x, f(x) = x^5\ln x, f(x) = x4^x, f(x) = e^x + x - 1,$
$f(x) = e^x + 1, f(x) = e^x + ex + 1, f(x) = x + 2\ln x, f(x) = \frac{x-1}{x+1}, f(x) = 2x^3 + 15x^2 - 24x - 1,$
$f(x) = 2^x + x\ln 2, f(x) = \frac{x-1}{x+3}, f(x) = e^x - \frac{x-1}{x}, f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}, f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, f(x) = \frac{2x-3}{x-2},$
$f(x) = x - \frac{3}{x}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 4, f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 4, f(x) = x^3 - 3x, f(x) = \ln x - \frac{x^2}{2},$

$f(x) = x - \sqrt{x}, f(x) = \ln x - 8, f(x) = -\frac{3}{x}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = \frac{2x-3}{x^2-2}, f(x) = (x+1)(x-2),$
$f(x) = \frac{1}{x^2-1}, f(x) = \frac{x-1}{e^x}, f(x) = (x+3)\ln x, f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}, f(x) = 2^x - 3^x, f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1},$
$f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}, f(x) = (x+3)\sqrt{x}, f(x) = 3^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \frac{x^2+x-1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2-1}{x}, f(x) = \frac{\ln x}{x^7},$
$f(x) = x\ln x + x, f(x) = x^3 + 3x + 1, f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1, f(x) = 2\sqrt{x} + \ln x,$
$f(x) = x^2 + x - \ln x, f(x) = \frac{e^x}{-x}, f(x) = (x^2-1)e^x - 1, f(x) = 2xe^x, f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = \frac{-x^3}{\ln x},$
$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}, f(x) = x - 2 + 3\sqrt[3]{x}, f(x) = \frac{x^2-1}{x}, f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 4,$
$f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 4, f(x) = x^3 - 3x, f(x) = \ln x - \frac{x^2}{2}, f(x) = x - \sqrt{x}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x},$
$f(x) = (x-1)(x+2), f(x) = (x+3)\ln x, f(x) = x^{2016} - 2016x, f(x) = 2016^x + x^{2016},$
$f(x) = x + 2\ln x + 2017, f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}, f(x) = (x+2016)e^x, f(x) = (3x+2)e^x, f(x) = x^2 + \ln x + 2016,$
$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x, f(x) = 7^x - 4^x + 2^x, f(x) = x^2 - 8x + 8\ln x + 2 - 8\ln 2,$
$f(x) = x^4e^{-x}, f(x) = e^x(x^2 + 4x + 3), f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\ln x, f(x) = 6x^2 - \ln x, f(x) = x - \mathrm{arctg}\,x, f(x) = 4x^2 - \sqrt{x},$
$f(x) = e^x - x - 13, f(x) = \frac{x^2+16x+64}{e^x}, f(x) = 3x - \ln x^e, f(x) = \ln x + \frac{2(x-1)}{x}, f(x) = 3\ln x - x^2 - 3x,$
$f(x) = 2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x+1}{x+3} + \frac{x+2}{x+4}, f(x) = (x-2)e^x + 2, f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}, f(x) = \frac{e^x}{x-7}.$

2.Calculați $f''(x)$ pentru următoarele funcții:

$f(x) = x^3 + 3x, f(x) = x^2e^x, f(x) = \cos x - \sin x, f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x} - x, f(x) = \frac{x}{x^2-1},$
$f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}, f(x) = \frac{\sin x}{1-\sin x}, f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, f(x) = x^3\ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = 3x^2 + 6x,$
$f(x) = x^3 + 5x, f(x) = e^x - x, f(x) = 2x + \ln x, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x^3e^x, f(x) = (2x+1)\ln x,$
$f(x) = (x^2+1)\ln x, f(x) = \cos^2 x, f(x) = \sin^3 x, f(x) = \cos^4 x, f(x) = x\cos x + \sin x, f(x) = \frac{x+1}{x-2},$
$f(x) = x\sin x - \cos x, f(x) = x^3\sqrt{x}, f(x) = x\,\mathrm{ctg}\,x, f(x) = x\sin x, f(x) = \frac{x-2}{x+1}, f(x) = \frac{x+1}{x-1},$
$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x, f(x) = e^x\sin x, f(x) = e^x\cos x, f(x) = x^3 + x^2 + x + 1,$
$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2, f(x) = 3\sin x + 4\cos x, f(x) = 3\sqrt{x} + 5x, f(x) = \frac{x}{x+2}, f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1},$
$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x}, f(x) = x^4\ln x, f(x) = 5x^2 + 2x + 3, f(x) = 3x + \ln x, f(x) = (x^2 + x + 1)\ln x,$
$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x, f(x) = \frac{x+1}{x-3}, f(x) = \frac{x}{x+1}, f(x) = x\ln x, f(x) = (x^2 + x)\ln x, f(x) = x^5e^x,$
$f(x) = x^{10} + x^5, f(x) = \sin^6 x, f(x) = \cos^5 x, f(x) = x^3\sin x, f(x) = x^2\sin^3 x, f(x) = x^3\cos^2 x,$
$f(x) = e^x\ln x, f(x) = e^x(\sin x + \cos x), f(x) = x^2(\sin x - \cos x), f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^2 + 2,$
$f(x) = 4\sin x + 3\cos x, f(x) = \frac{x+4}{x-4}, f(x) = \frac{e^x+3}{e^x-3}, f(x) = \frac{2+\sin x}{2-\sin x}, f(x) = \frac{e^x+3}{e^x+1}, f(x) = \frac{2+\sin x}{2-\sin x},$
$f(x) = \frac{2-\cos x}{2+\cos x}, f(x) = \frac{x+7}{x+6}, f(x) = (x+2)e^x, f(x) = (3x-2)e^x, f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin x},$
$f(x) = x^2 + 2x + 2 - 2e^x, f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 4, f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, f(x) = \frac{\ln x}{2-x}, f(x) = \frac{x^2-8}{e^x},$
$f(x) = \frac{x^2-15}{e^x}, f(x) = x^{2018} - 2018x + 2, f(x) = x^{2016} + 2016x + 4,$
$f(x) = -e^x + \ln x - 3, f(x) = 8\ln x - x^2, f(x) = x^2 - 32\ln x, f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2,$
$f(x) = e^x + \frac{1}{3}x^3 + x + 1, f(x) = \frac{1}{x(x-1)}, f(x) = \frac{1}{x(x+2)}, f(x) = \frac{x+3}{x-2}, f(x) = \frac{x-2}{x+1}, f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2},$
$f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}, f(x) = \frac{x+2}{e^x-x}, f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x}, f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+5}, f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+10}, f(x) = \frac{xe^x}{x+4}, f(x) = \frac{xe^x}{x+2},$

$f(x)=\frac{x^2}{x-4}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $f(x)=-\frac{\ln x}{x^3}$, $f(x)=5x+e^x$, $f(x)=-3x+e^x$, $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$,
$f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$, $f(x)=\frac{e^x}{3x+e^x}$, $f(x)=\frac{e^x}{4x+e^x}$, $f(x)=2\cos x+x^2$, $f(x)=-x^2-2\cos x$,
$f(x)=e^x-x+1$, $f(x)=x-e^x$.

Derivarea funcţiilor compuse

$$\left((f\circ g)(x)\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x) \quad , \quad \left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Tabel de derivate funcţii compuse

$(u^2)'=2u\cdot u'$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	$(\mathrm{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$(u^3)'=3u^2\cdot u'$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^4)'=4u^3\cdot u'$	$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(u^5)'=5u^4\cdot u'$	$(\sqrt[3]{u})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\mathrm{arctg}u)'=\frac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(u^6)'=6u^5\cdot u'$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\mathrm{arcctg}u)'=-\frac{1}{u^2+1}\cdot u'$
$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$	$(e^{-u})'=-e^{-u}\cdot u'$	$(\mathrm{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	

Derivate funcţii compuse

3.Calculaţi derivatele următoarelor funcţii:
$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+9}+x)$, $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+16}+x)$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+3)$,
$f(x)=\ln(x-2)+1-e^x$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+3}}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$,
$f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$, $f(x)=\ln(x-3)+\ln(x+3)$, , $f(x)=e^x+\ln x^3+2$,
$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $f(x)=\ln\frac{x+4}{x-4}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+2x+3}$,
$f(x)=\ln(x+1)-x$, $f(x)=x+1-\ln(x+2)$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$,
$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$, $f(x)=e^{x^2+2x+1}$, $f(x)=e^{x^2+3x+2}$, $f(x)=\sin(x^2+3x)$,
$f(x)=\sin(x^2-2x)$, $f(x)=\cos(x^2+3x)$, $f(x)=\cos(x^2-2x)$, $f(x)=\mathrm{tg}(x^2+3x)$,
$f(x)=\mathrm{tg}(x^2-2x)$, $f(x)=\mathrm{ctg}(x^2+3x)$, $f(x)=\mathrm{ctg}(x^2-2x)$, $f(x)=\arcsin(3x)$,
$f(x)=\mathrm{arsin}(2x)$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x+2}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$, $f(x)=(x^2+x+1)^6$,
$f(x)=(x^2-x+1)^8$, $f(x)=(3x+4)^7$, $f(x)=(3x-4)^7$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$,
$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$, $f(x)=e^{x^3}$, $f(x)=\sin e^x$, $f(x)=\cos e^x$, $f(x)=\mathrm{tg}e^x$, $f(x)=\mathrm{ctg}e^x$, $f(x)=\frac{1}{x-3}+\ln\frac{x-2}{x}$,
$f(x)=\sqrt{x^4-x^2+3}$, $f(x)=3-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$, $f(x)=x^4e^{-x}$, $f(x)=x-\ln(x^2+x+5)$,
$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-x+1$, $f(x)=2x^3+3x^2+6x-6\ln(x-1)$, $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+49}+x)$,
$f(x)=x\ln(x+3)$, $f(x)=x^2-4\sqrt{x^2-2}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4x+4}$, $f(x)=2-2x+2\ln(x+1)$.

Limitele unor funcţii

Funcţiile cu nume se numesc funcţii elementare,o să numim funcţii elementare şi operaţiile cu aceste funcţii cu nume.
Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie elementară şi $a\in D\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.
$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{c}{\infty}=0$
Pentru $x_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	convexă $f(x_0)$ concavă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune al lui f

Fie M un interval și f o funcție
dacă $f''(x) > 0\ \forall x \in M \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe M
dacă $f''(x) \geq 0\ \forall x \in M \Leftrightarrow f'$ este crescătoare pe M
dacă $f''(x) < 0\ \forall x \in M \Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe M
dacă $f''(x) \leq 0\ \forall x \in M \Leftrightarrow f'$ este descrescătoare pe M

Subiectul III1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{3}{x+2}-\ln\frac{x}{x+2}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x-4}{x(x+2)^2}, x \in (0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ și $h:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+2}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h **nu** au niciun punct comun.
2.Se consideră funcția $f:(-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+2}-\ln\frac{x+1}{x+2}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}, x \in (-1,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Se consideră funcțiile $g:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{x+2}$ și $h:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x+1}{x+2}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h **nu** au niciun punct comun.
3. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x)=\ln x-2\sqrt{x}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x}, x \in (0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=4, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\ln x-2\sqrt{x} \leq -2$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.
4. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}, x \in (0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=4, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că$2\sqrt{x}-\ln x \geq 2$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.
5.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^4e^{-x}$.
a)Arătați că $f'(x)=x^3(4-x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, 256e^{-4})$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.
6.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^5e^{-x}$.
a)Arătați că $f'(x)=x^4(5-x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, 5^5e^{-5})$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale.

7.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+2x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+3)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
8.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+8x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=e^x(x+9)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
c)Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale.
9.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln(x^2-2x+2)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{9}{5}x+3$.
c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.
10.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x^2+2x+2)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2+2x+2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{5}x+2$.
c)Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)+n=0$ are soluţie unică.
11.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-x+1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x^2+2x+4}}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
12.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x+1$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x^2+2x+5}}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi imaginea funcţiei f.
13.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x^3$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{6-3\ln x}{2x\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
c)Demonstraţi că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.
14.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x^4$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{4-2\ln x}{x\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinaţi abscisa punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
c)Demonstraţi că $3^{\sqrt{7}}<7^{\sqrt{3}}$.
15.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=32x^2-\ln x$.

a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(8x-1)(8x+1)}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Demonstraţi că punctul $A\left(\frac{8}{9},25\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f\left(\frac{1}{7}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{39}}\right)<f\left(\frac{1}{6}\right)$.
16.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=50x^2-\ln x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(10x-1)(10x+1)}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Demonstraţi că punctul $A\left(\frac{2}{5},-3\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f\left(\frac{1}{9}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{73}}\right)<f\left(\frac{1}{8}\right)$.
17.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-6x^2+12x-12\ln(x+1)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{12x^3}{x+1}, x\in(-1,+\infty)$.
b)Demonstraţi că valoarea minimă a funcţiei f este 0.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.
18.Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=12\ln(x+1)-4x^3+6x^2-12x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=-\frac{12x^3}{x+1}, x\in(-1,+\infty)$.
b)Demonstraţi că valoarea maximă a funcţiei f este 0.
c)Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{-f(x)}}{x}$.
19.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-\operatorname{arctg}x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)-g(x)=-\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x+x$.
20.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arcctg}x-x$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2-x^2}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Demonstraţi că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x+x$.
21.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=16x^2-\sqrt{x}$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-15}{x-1}=\frac{63}{2}$.
b)Determinaţi imaginea funcţiei f.
c)Demonstraţi că $16e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{16}\geq 0$, pentru orice număr real x.
22.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+8}{x-4}=-7$.
b)Determinaţi imaginea funcţiei f.
c)Demonstraţi că $4e^{\frac{x}{2}}-e^{2x}-3\leq 0$, pentru orice număr real x.
23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
25.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+2-2e^x$.
a)Arătați că $f'(x)=2(x+1-e^x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
26.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2e^x-x^2-2x-4$.
a)Arătați că $f'(x)=2(e^x-x-1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
27.Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-1-\ln(x+3)$.
a)Arătați că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+3}, x\in(-3,+\infty)$.
b)Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-3,+\infty)$.
c)Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
28.Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x-2)+1-e^x$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x-2}-e^x, x\in(2,+\infty)$.
b)Demonstrați că funcția f este concavă pe $(2,+\infty)$.
c)Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
29.Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, x\in(1,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $x-1<x\ln x$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
30.Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{2-x}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{2-x+x\ln x}{x(2-x)^2}, x\in(1,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $x\ln x>x-2$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.
31. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-8}{e^x}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+8}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=−2,situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că $-4e^2\le f(x)\le\frac{8}{e^4}$, pentru orice $x\in[-2,+\infty)$.
32. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-15}{e^x}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+15}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=−3,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $-6e^3\le f(x)\le\frac{10}{e^5}$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.
33.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2018}-2018x+2$.
a)Arătați că $f'(x)=2018(x^{2017}-1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,-2016)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.
34.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2016}+2016x+4$.
a)Arătați că $f'(x)=2016(x^{2015}+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă 0 situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.
35.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+3}}$.
a)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^3}$.
c)Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in(-2,-1)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.
36.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.
a)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{3x}=e^3$.
c)Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in(1,\sqrt{2})$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.
37.Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}, x\in(1,+\infty)$.
b)Demonstrați că funcția f este concavă pe $(1,+\infty)$.
c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\cdots+f'(n)\right)=\frac{3}{2}$.
38.Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}, x\in(2,+\infty)$.
b)Demonstrați că funcția f este convexă pe $(2,+\infty)$.
c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\left(f'(3)+f'(4)+f'(5)+\cdots+f'(n)\right)=-\frac{25}{12}$.
39.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+\ln x+3$.
a) Arătați că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.
40. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + \ln x^3 + 2$.
a) Arătați că $f'(x) = e^x + \frac{3}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.
41.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c) Demonstrați că,pentru orice număr real a,$a \in (-2,2)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
42.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c) Demonstrați că,pentru orice număr real a,$a \in (-1,1)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
43.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 8\ln x - x^2$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(2-x)(x+2)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte.
44.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 32\ln x$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-4)(x+4)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte.
45.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2e^x - x^2 - 2x - 2$.
a)Arătați că $f'(x) = 2e^x - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstrați că $f(5\sqrt{6}) < f(6\sqrt{5})$.
46.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x + \frac{1}{3}x^3 + x + 1$.
a)Arătați că $f'(x) = e^x + x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
c)Demonstrați că $f(-2\sqrt{3}) > f(-3\sqrt{2})$.
47.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$.
a)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
b)Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f,în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculați $\lim_{n\to+\infty} \left(f(2) + f(3) + \cdots + f(n)\right)^n$.
48.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$.

a)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
b)Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f,în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.
c)Calculați $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)\right)^n$.
49.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.
a)Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că derivata funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
50.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x^2+2x+3}$.
a)Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că derivata funcției f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
51.Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.
a)Arătați că $f'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}$, $x \in (2,+\infty)$.
b)Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.
c)Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f,în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-5x$.
52.Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$, $x \in (-1,+\infty)$.
b)Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.
c)Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f,în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x$.
53.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+2x+2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to\infty} (f(x))^x$.
54.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-x+2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$,situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to-\infty} (f(x))^{x+1}$.
55.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{e^x - x}$.
a)Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$,situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to\infty} f(-x)$.

56.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x}$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$,situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to\infty} f(-x)$.
57.Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln(x+1) - x$.
a)Calculați $f'(x), x\in(-1,+\infty)$.
b)Calculați $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x-\ln 2}{x-1}$.
c)Demonstrați că $x\geq\ln(x+1)$,pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
58.Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x+1-\ln(x+2)$.
a)Calculați $f'(x), x\in(-2,+\infty)$.
b)Calculați $\lim_{x\to 2}\frac{x+1-f(x)-\ln 4}{x-2}$.
c)Demonstrați că $\ln(x+2) \leq x+1$,pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.
59.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+5}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+1)(x+3)}{(x^2+4x+5)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale lui f.
60.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+10}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+2)(x+4)}{(x^2+6x+10)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale lui f.
61.Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{xe^x}{x+4}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x+2)^2e^x}{(x+4)^2}, x\in(-4,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că ecuația $f(x) = 2$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.
62.Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{xe^x}{x+2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}, x\in(-\infty,-2)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -3$,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că ecuația $f(x) = \frac{2}{e^3}$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-4,-3)$.
63. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x-4}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-8)}{(x-4)^2}, x\in(4,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 6$,situat pe graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
64. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+2}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}, x\in(2,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$,situat pe graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
65. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{2e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
66. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{\ln x}{x^3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{3\ln x-1}{x^4}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că $f(x) \geq -\frac{1}{3e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
67.Se consideră funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5x + e^x$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că $f(x) \geq 6x+1$ pentru orice număr real x.
68.Se consideră funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -3x + e^x$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că $f(x) \geq -2x+1$ pentru orice număr real x.
69. Se consideră funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
70. Se consideră funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
71.Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
a)Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=2,situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+4}$.
72.Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$.
a)Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=3,situat pe graficul funcției f.
c)Calculați $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+2}$.
73. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{3x+e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x-1)e^x}{(3x+e^x)^2}$,pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+3}$,pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
74. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{4x+e^x}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$,pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+4}$,pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
75. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2\cos x + x^2$.
a) Calculați $f'(x), x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) \geq 2$,pentru orice $x\epsilon\mathbb{R}$.
76. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2\cos x$.
a) Calculați $f'(x), x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) \leq -2$,pentru orice $x\epsilon\mathbb{R}$.
77.Se consideră funcția $f:(-2,2) \to \mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$.
a)Calculați $f'(x), x\epsilon(-2,2)$.
b)Verificați dacă funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2,2)$.
c)Determinați punctele de inflexiune a funcției f.
78.Se consideră funcția $f:(-2,2) \to \mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.
a)Calculați $f'(x), x\epsilon(-2,2)$.
b)Verificați dacă funcția f este crescătoare pe intervalul $(-2,2)$.
c)Determinați punctele de inflexiune a funcției f.
79.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x + 1$.
a)Calculați $f'(0)$.
b)Arătați că,pentru fiecare număr natural $n \geq 3$,ecuația $f(x) = n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.
c)Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x) = n$, unde n este număr natural, $n \geq 3$.Arătați că $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
80.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - e^x$.
a)Calculați $f'(0)$.
b)Arătați că,pentru fiecare număr natural $n \geq 2$,ecuația $f(x) = -n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.
c)Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x) = -n$, unde n este număr natural, $n \geq 2$.Arătați că $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.
81.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 - 20x + 50\ln x + 75 - 50\ln 5$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-5)^2}{x}$, $x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A(3,3) și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctual de abscisă x=5, situat pe graficul funcției f.

c)Se consideră numerele reale a,b și c astfel încât punctul M(a, b) este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 50\ln 5 + 50\ln x$ și punctul N(a, c) este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = 20x - 75$.Demonstrați că $b \geq c$, pentru orice $a\in[5,+\infty)$.
82.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2 - 24x + 72\ln x + 108 - 72\ln 6$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-3)^2}{x}$, $x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A(5,5) și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctual de abscisă x=6, situat pe graficul funcției f.
c)Se consideră numerele reale a,b și c astfel încât punctul M(a, b) este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 72\ln 6 + 72\ln x$ și punctul N(a, c) este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = 24x - 108$.Demonstrați că $b \geq c$, pentru orice $a\in[6,+\infty)$.
83.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4 - x^2 + 16}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+16}}, x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că,pentru orice $m\epsilon\left(\frac{\sqrt{63}}{2}, 4\right)$ ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
84.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4 - x^2 + 25}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+25}}, x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că,pentru orice $m\epsilon\left(\frac{\sqrt{99}}{2}, 5\right)$ ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
85.Se consideră funcția $f:(5,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-5} + \ln\frac{x-1}{x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-9x+25}{x(x-1)(x-5)^2}$, $x\epsilon(5,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{1}{x-5} > \ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\epsilon(5,+\infty)$.
86.Se consideră funcția $f:(6,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-6} + \ln\frac{x-1}{x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-11x+36}{x(x-1)(x-6)^2}$, $x\epsilon(6,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{1}{x-6} > \ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\epsilon(6,+\infty)$.
87.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x)=12^x - 4^x + 3^x$.
a)Arătați că $f'(0) = \ln 9$.
b)Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care $A(a, \ln(9e))$ este este situat pe această tangentă.
c)Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.
88.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x)=12^x - 3^x + 4^x$.
a)Arătați că $f'(0) = \ln 16$.
b)Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care $A(a, \ln(16e))$ este este situat pe această tangentă.
c)Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

89.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+4}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(e^x+4x+4)}{(e^x+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că dreapta de ecuație y=x este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
90.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+5}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(e^x+5x+5)}{(e^x+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că dreapta de ecuație y=x este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
91.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)(x^2-9)+5$.
a)Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-5} = \frac{1}{48}$.
c)Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
92.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)(x^2-4)+5$.
a)Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2-5)$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{f(x)-5} = \frac{1}{12}$.
c)Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
93.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+4}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție.
94.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+5}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție.
95.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4-4\ln x$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.
96.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-5-4\ln x$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{4(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.
97.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x-2)e^{-x}$.
a)Arătați că $f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$.
c)Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \left|\frac{f(x)}{e^{-x}}+2\right|$ are un singur punct de extrem.
98.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+3x+2)e^{-x}$.
a)Arătați că $f'(x) = (1-x)^3e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$.
c)Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \left|\frac{f(x)}{e^{-x}}-2\right|$ are un singur punct de extrem.
99.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-10x+40)\sqrt{x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{5(x^2-6x+8)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
c) Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{10}} = \frac{1}{e}$.
100.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-15x+100)\sqrt{x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{5(x^2-3x+2)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
c) Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{15}} = \frac{1}{e}$.
101.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=4+\frac{x}{e^x-x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că, pentru orice $m\in(3,4]$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.
102.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{x}{e^x-x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că, pentru orice $m\in(4,5]$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.
103.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{e^x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(5-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.
104.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{e^x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(6-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$la graficul funcției f.
c)Demonstrați că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

Tabel de integrale nedefinite

$\int dx = \int 1\,dx = x + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}x + C$
$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \mathrm{tg}x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \mathrm{ctg}x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	

Integrala nedefinită,primitive

Fie f,F:I→ℝ două funcții și I un interval.

F se numește primitivă a lui f $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{F este derivabilă} \\ F' = f,\ (F'(x) = f(x),\ \forall x\in I) \end{cases}$

$\int f(x)\,dx = \{F(x) \mid F$ este primitivă a lui $f\}$ se numește mulțimea primitivelor funcției f

$\mathcal{C} = \{k: I \to \mathbb{R} \mid k(x) = k\ \forall x\in\mathbb{R}\}$ se numește mulțimea funcțiilor constante

Dacă F este o primitivă a lui f atunci $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}$

$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathcal{C}$

$\int f''(x)\,dx = f'(x) + \mathcal{C}$

Proprietăți pentru integrala nedefinită

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\qquad \int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ $\qquad \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Primitive

1.Calculați următoarele integrale nedefinite:

$\int dx$, $\int \frac{5}{4}dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{x^6}dx$, $\int (3x+1)^2\,dx$, $\int x(2-x)^2\,dx$, $\int \sqrt[4]{x}\,dx$, $\int \sqrt[5]{x}\,dx$,

$\int (-3x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x})\,dx$, $\int \frac{4x^3-5x+6}{x^5}dx$, $\int x(3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x})\,dx$, $\int \frac{4x-1}{x^5}dx$, $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}\right)dx$,

$\int \frac{1}{x^2-25}dx$, $\int \frac{1}{x^2+36}dx$, $\int \frac{1}{25-x^2}dx$, $\int \frac{1}{x^2+4}dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2+9} - \frac{3}{9-x^2}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-4)(x^2-5)}{x}dx$, $\int \frac{1}{x^2+6}dx$,

$\int \frac{(x^2-1)(3x+2)}{\sqrt{x}}dx$, $\int (-3\sin x + 4\cos x)\,dx$, $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int (\mathrm{ctg}x + 3\mathrm{tg}x)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx$,

$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$, $\int (3^x + 4^{x+1} + 5^{x+2})\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$, $\int \frac{\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$,

$\int \frac{dx}{6+5x^2}$, $\int \frac{dx}{6-5x^2}$, $\int \frac{dx}{5x^2-6}$, $\int (3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2)\,dx$, $\int (x^2-3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{5}{x}\right)dx$,

$\int (5x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3})\,dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 12x^4\cdot\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}dx$, $\int \frac{10}{25x^2-9}dx$, $\int \frac{8}{16x^2+1}dx$,

$\int \frac{25}{5x^2+125}dx$, $\int (6^x\ln 6 - 5^x\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-45}}dx$, $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$, $\int (x^8-5)\,dx$,

$\int (5\sin x + 6\cos x)\,dx$, $\int (4\sin^2 x - \sqrt[3]{-64}\cos^2 x)\,dx$, $\int 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $\int 10\cos^2\frac{x}{2}dx$,

$\int 10\sin^2 x\,dx$, $\int (6x^5 - 3x^4 + 2x - 9)\,dx$, $\int (7x^2 - 4x + 2)\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-49}dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-49}}dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{x^2+49}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+49}}dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx$,

$\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}dx$, $\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx$, $\int 9^x\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-64}dx$,

$\int x^{14}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-64}}dx$, $\int \frac{1}{x^2+64}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+64}}dx$, $\int x^{15}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+81}}dx$, $\int \frac{1}{x^2+81}dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-81}}dx$, $\int \frac{1}{x^2-81}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}dx$, $\int 8^x\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^{17}\,dx$, $\int 17^x\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+100}}dx$, $\int \frac{1}{x^2+100}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-100}}dx$, $\int \frac{1}{x^2-100}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2-100}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+7}dx$, $\int \frac{1}{x^2-7}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{x^2+10}dx$, $\int \frac{1}{x^2-10}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-10}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{10-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{9+x^2}dx$, $\int \frac{1}{9-x^2}dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int x^6\,dx$, $\int 9x^8\,dx$, $\int x^{\frac{5}{6}}\,dx$, $\int \sqrt[6]{x^5}\,dx$, $\int x^{-\frac{7}{2}}\,dx$, $\int 13x\sqrt[5]{x^4}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$, $\int e^x\,dx$, $\int 6^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-16}dx$, $\int \frac{1}{25+x^2}dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{(x-5)(x+5)}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}dx$, $\int \frac{1}{(5-x)(5+x)}dx$, $\int \frac{1}{x^2-6}dx$, $\int \frac{1}{6-x^2}dx$,

$\int \frac{1}{x^2+6}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}}dx$, $\int (2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x - 3)\,dx$, $\int (\sin x + x)\,dx$,

$\int \frac{4x^4-3x^3+x^2+3x+2}{x^3}dx$, $\int \left(\frac{2}{6+x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (2\sin x + 3\cos x)\,dx$, $\int \left(3e^x - \frac{4}{x} + 3\cdot 5^x\right)dx$,

$\int \left(\frac{6}{25x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (x^3\cdot\sqrt[3]{x} + 3x\cdot\sqrt{x^5})\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-25}+5}{x^2-25}dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$,

$\int (3x^6 - 5x^4 + 2x^3 + 3x - 2)\,dx$, $\int \frac{3x^4+4x^3-x^2+2x+3}{x^2}dx$, $\int \left(\frac{3}{7+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)dx$, $\int (1-\sin x)\,dx$,

$\int (2\cos x + 3\sin x)\,dx$, $\int \left(3\cdot e^x - \frac{2}{x} + 4\cdot 3^x\right)dx$, $\int \left(\frac{6}{16x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\right)dx$, $\int (x + \mathrm{tg}x)\,dx$,

$\int (x^2\cdot\sqrt[3]{x} + 2x\cdot\sqrt{x^3})\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-16}+4}{x^2-16}dx$, $\int \frac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$, $\int (6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 4x + 2)\,dx$,

$\int (x^2-3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{5}{x^3} - \frac{7}{x^5} - \frac{6}{x}\right)dx$, $\int (9x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3})\,dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 31x^5\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}dx$,

$\int \frac{20}{4x^2-9}dx$, $\int \frac{3}{9x^2+1}dx$, $\int \frac{10}{5x^2+125}dx$, $\int (7^x\cdot\ln 7 - 5^x\cdot\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{7x^2+28}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}dx$,

$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$, $\int (5\sin x + 3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin x - 3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin^2 x - \sqrt[3]{-125}\cos^2 x)\,dx$,

$\int e^x\left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int 3^x\left(3^{-x} + 3^{-x}\cdot x^3 + 6 + 5^x + \frac{3^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{6x^5+x^2-x+1}{x^3}dx$, $\int \frac{4x^3-x^4}{\sqrt{x}}dx$,

$\int \left(\frac{1}{5+x^2} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2-6} + \frac{3}{\sqrt{x^2-6}}\right)dx$, $\int \left(\frac{5}{x^2-4} - \frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$,

$\int \left(\frac{5}{x^2+4} - \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}-\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}dx$, $\int (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3)\,dx$,

$\int \left(3x^2 - 6x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^3 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^3}\right)dx$, $\int (5\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[4]{x} + 4x - 2\sqrt{x})\,dx$, $\int \left(x^4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}\right)dx$,

$\int (x^5 - 3x^2 + 2x - 6)\,dx$, $\int \left(5x^2 - 7x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}\right)dx$, $\int (3x\sqrt{x} - 4x\sqrt[3]{x^2})\,dx$,

$\int \left(6\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x} + 3x^2 - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^3}dx$, $\int \frac{\sin^3 x-5}{\sin^2 x}dx$, $\int (x^2 - 3e^x)\,dx$, $\int (x^5 + 2e^x)\,dx$,

$\int \left(6^x - \frac{1}{x^3} + e^x + \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2+5)^2}{x^3}dx$, $\int \frac{(x^2-4)^2}{x^4}dx$, $\int \frac{(x^2-2)^2}{x^5}dx$, $\int (4x^2\sqrt{x} - 3x^4\sqrt[3]{x^5})\,dx$,

$\int \frac{\cos^3 x+4}{\cos^2 x}dx$, $\int (x^2 - 3x + 5 + 2e^x)\,dx$, $\int (x^6 - 8x^2 + 3x + 7 + 3e^x)\,dx$, $\int \left(\frac{3-2x}{x}\right)^2dx$,

$\int \left(7^x - \frac{1}{x^4} + 2e^x - \frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+25}}dx$, $\int \frac{1}{9x^2+25}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}dx$,

$\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int \frac{(x-2)^3}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+2)^3}{x^4}dx$, $\int \left(-\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$,

$\int 4^x\left(1-\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{xe^x-5x}{x}dx$, $\int \frac{x\cdot 7^x-7x}{x}dx$, $\int e^x\left(4+\frac{5e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$,

$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$, $\int (x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x})dx$, $\int \left(4x-\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx$, $\int \left(3x+\frac{5}{x^2}\right)dx$, $\int \left(5x-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx$,

$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$, $\int \frac{x-5}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx$, $\int (x^2\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[4]{x})dx$, $\int 7^x\left(3-4^x+\frac{7^{-x}}{x^5}-\frac{7^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$,

$\int 4^x\left(2-3^x+4^{-x}\cdot x^5+\frac{4^{-x}}{x^5}+\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int(6x^4-5x^3+4x^2-5x+2)dx$, $\int(x^2-3x)^3dx$,

$\int(3x^4+6x^3-5x^2+4x-1)dx$, $\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{6}{x^5}-\frac{4}{x}\right)dx$, $\int\left(9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$,

$\int(5x^3\sqrt{x}+2x\sqrt[4]{x})dx$, $\int(x^2+2x)^3dx$, $\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-32x^5\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$, $\int\left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^6}}-14x^5\cdot\sqrt[4]{x}\right)dx$,

$\int\frac{1}{9x^2-1}dx$, $\int\frac{15}{25x^2-9}dx$, $\int\frac{1}{9x^2+1}dx$, $\int\frac{15}{25x^2+9}dx$, $\int\frac{1}{16x^2-1}dx$, $\int\frac{20}{16x^2-25}dx$, $\int\frac{27}{9x^2+1}dx$, $\int\frac{8}{4x^2+64}dx$,

$\int(6^x\ln 6-5^x\ln 25)dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}dx$, $\int\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{6x^2+54}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{6x^2-54}}dx$,

$\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+64}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-100}}dx$, $\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7x^2+28}}dx$, $\int(5\sin x+3\cos x)dx$, $\int(3\sin^2x-\sqrt[3]{-27}\cos^2x)dx$,

$\int(4\cos^2x-\sqrt[3]{-64}\sin^2x)dx$, $\int 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx$, $\int 4\sin^2\frac{x}{2}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx$,

$\int\frac{6x^5+3x^4+2x^3-5x^2+3x-4}{x^3}dx$, $\int\frac{6x^3-x^5}{\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{x\sqrt[4]{x}+3x^2\cdot\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}dx$, $\int\left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$, $\int\frac{(x-1)^4}{x^3}dx$,

$\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int\frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{9-x^4}}dx$, $\int\frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}dx$, $\int\frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}dx$, $\int(7^x\ln\sqrt[3]{49}-\ln 5\cdot 25^x)dx$.

Integrala definită,proprietăţi pentru integrala definită

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa , atunci

$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$ se numeşte integrala definită a funcţiei f .

$\int_a^b f'(x)\,dx=f(x)|_a^b=f(b)-f(a)$, $\int_a^b f''(x)\,dx=f'(x)|_a^b=f'(b)-f'(a)$

$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$, $\int_a^b(f(x)-g(x))dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$,

$\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$,

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$, $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx=0$.

Integrale definite

2.Calculaţi următoarele integrale definite:

a) $\int_0^1 x^2dx$, $\int_1^3 x\,dx$, $\int_0^1(x+1)dx$, $\int_1^2(x+2)dx$, $\int_{-1}^1(x^3+3x)dx$, $\int_0^1(4x^3+3x^2+2x+1)dx$,

$\int_0^1 x\,dx$, $\int_0^{2014}dx$, $\int_0^2 x^2dx$, $\int_0^1\frac{-2x^2}{x^2+1}dx$, $\int_2^3(x+1)dx$, $\int_1^2 x\,dx$, $\int_0^1(3x+1)dx$, $\int_1^2 2x\,dx$,

$\int_1^2(2x+3)dx$, $\int_0^1 x^3dx$, $\int_0^3 x\,dx$, $\int_0^1(x+4)dx$, $\int_1^2(x-2)dx$, $\int_{-1}^1(x^3-3x)dx$,

$\int_0^1(4x^3-3x^2+2x-1)dx$, $\int_0^1 4x\,dx$, $\int_1^{2016}dx$, $\int_0^1 x^{2016}dx$, $\int_2^3\frac{-2x^2}{x^2-1}dx$, $\int_2^3(x-1)dx$, $\int_2^3 x\,dx$,

$\int_0^1(3x-4)dx$, $\int_1^2 5x\,dx$, $\int_1^2(2x-3)dx$.

b) $\int_1^2 xe^xdx$, $\int_1^2\ln x\,dx$, $\int_1^e x^3\ln x\,dx$, $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, $\int_0^1\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$, $\int_2^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1(x+1)e^xdx$,

$\int_0^1(3x+1)e^xdx$, $\int_0^1(x^2e^x-2x)dx$, $\int_0^1 xe^xdx$, $\int_1^e\ln x\,dx$, $\int_e^{e^2}x^3\ln x\,dx$, $\int_1^{e^2}x^2\ln x\,dx$, $\int_1^2\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$,

$\int_1^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1(x-1)e^xdx$, $\int_0^1(3x-1)e^xdx$, $\int_0^1(x^2e^x+2x)dx$,

c) $\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx$, $\int_0^1\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$, $\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx$, $\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$, $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$, $\int_2^4\frac{1}{x+1}dx$, $\int_2^3\frac{x^3-1}{x^2-1}dx$, $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$,

$\int_{-1}^0\frac{x^2}{x-1}dx$, $\int_2^3\frac{x^3-3x}{x^2-1}dx$, $\int_2^3\left(x^2+\frac{x}{x-1}\right)dx$, $\int_0^1\frac{1}{x-2}dx$, $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$, $\int_2^4\frac{1}{x-1}dx$, $\int_2^3\frac{x^3+1}{x^2-1}dx$, $\int_2^3\frac{x}{x^2-1}dx$.

Inegalităţi integrale

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\ge 0$ $\forall x\epsilon[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $m\le f(x)\le M$ $\forall x\epsilon[a,b]$ atunci

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$.

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue şi $f(x)\le g(x)$ $\forall x\epsilon[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$.

Metoda integrării prin părţi

$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Integrale prin părţi

3.Calculaţi următoarele integrale definite:

$\int_0^1(x+2)e^xdx$, $\int_0^1(x-5)e^xdx$, $\int_1^e x^2\ln^2x\,dx$, $\int_1^e x^4\ln^2x\,dx$, $\int_1^e x\ln^2x\,dx$, $\int_0^1 x(e^x+4x^3)dx$,

$\int_0^1 x(e^x+6x^2)dx$, $\int_1^e\ln^2x\,dx$, $\int_0^1 e^xx\,dx$, $\int_1^e x^3\ln x\,dx$, $\int_1^e x^{2017}\ln x\,dx$, $\int_0^1(1-x)^2e^xdx$, $\int_0^1 x^2e^xdx$,

$\int_0^1(x+1)e^xdx$, $\int_1^4 xe^xdx$, $\int_2^3 xe^xdx$, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx$

Metoda schimbării de variabilă

$\int_a^b((f\circ g)(x))g'(x)dx=\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(t)\,dt$

$g(x)=t\Rightarrow g'(x)dx=dt$

pentru $x=a\Rightarrow t=g(a)$

pentru $x=b\Rightarrow t=g(b)$

$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\begin{cases}0, \text{ dacă f este impară } (f(-x)=-f(x),\forall x\epsilon[-a,a])\\ 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{ dacă f este pară } (f(-x)=f(x),\forall x\epsilon[-a,a])\end{cases}$

Integrale prin schimbare de variabilă

4.Calculaţi următoarele integrale definite:

$\int_{-4}^0(x+4)^3dx$, $\int_{-3}^0(x+3)^4dx$, $\int_{-2}^4(x+4)^n$, $\int_{-1}^1(x+3)^ndx$, $\int_1^2\frac{1}{x+2}dx$, $\int_1^2\frac{x}{x+2}dx$, $\int_1^3\frac{1}{x+1}$, $\int_1^3\frac{x}{x+1}dx$

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$, $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+4}}dx$, $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, $\int_e^{e^4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, $\int_0^1\frac{x}{x+4}dx$, $\int_0^1\frac{x}{x+3}dx$, $\int_0^1 e^x(x+1)dx$, $\int_0^1 e^x(x-3)dx$,

$\int_3^9\frac{1}{x}dx$, $\int_4^6\frac{1}{(x-1)^2}dx$, $\int_3^{12}\frac{1}{x}dx$, $\int_1^3\frac{1}{(x+2)^2}dx$, $\int_4^6\frac{1}{x^2}dx$, $\int_1^e\frac{\ln x^2}{x^2}dx$, $\int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx$, $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$, $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$,

$\int_1^e\frac{\ln^nx}{x}dx$, $\int_0^1 e^{2x}dx$, $\int_0^1\frac{x}{x^2+25}dx$, $\int_0^{\sqrt{5}}\frac{x}{x^4+25}dx$, $\int_0^3\frac{x}{x^2+3}dx$, $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^4+3}dx$, $\int_0^1\frac{x}{2+x}dx$, $\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx$,

$\int_0^1\frac{x}{4+x}dx$, $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+2}dx$, $\int_0^1\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$, $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx$,

Arii,volume

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\ge 0$ $\forall x\epsilon[a,b]$ atunci aria subgraficului funcţiei f sau aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b este

$\mathcal{A}_{\Gamma_f}=\int_a^b f(x)\,dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă $\forall x\epsilon[a,b]$ atunci aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b este $\mathcal{A}=\int_a^b|f(x)|\,dx$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă şi $f(x)\ge 0$ $\forall x\epsilon[a,b]$ atunci volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei f este $\mathcal{V}_{C_f}=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Subiectul III2 (prelucrări bacalaureat)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+16}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{49}{3}$.

b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\frac{34\sqrt{17}-128}{3}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\int_0^x t^4 f(t)\,dt$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+25}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{76}{3}$.

b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\frac{52\sqrt{26}-250}{3}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\int_0^x t^5 f(t)\,dt$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+5}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+5)f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b) Demonstrați că orice primitivă f are un singur punct de inflexiune.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+6}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+6)f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b) Demonstrați că orice primitivă f are un singur punct de inflexiune.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + \ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x)dx = 7$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 3x^2 + f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n(f(x) - 3x^2)\,dx = 0$.

6. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + \ln x$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x)dx = \frac{28}{3}$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4x^2 + f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n(f(x) - 4x^2)\,dx = 0$.

7. Se consideră funcția $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{\ln x}$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

b) Calculați $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=e$ și $x=a$ are aria egală cu 3a.

8. Se consideră funcția $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{\ln x}$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

b) Calculați $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.

c) Determinați numărul real a, $a>e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=e$ și $x=a$ are aria egală cu 4a.

9. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_0^4 e^x f(x)dx = 8$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-3$ și $x=3$ are aria egală cu $2e^3+2-\frac{4}{e^3}$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{n+2}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+4)I_n = \frac{1}{e}$.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_0^5 e^x f(x)dx = \frac{25}{2}$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-4$ și $x=4$ are aria egală cu $3e^4+2-\frac{5}{e^4}$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^{n+3}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+5)I_n = \frac{1}{e}$.

11. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3\ln(x+1)$.

a) Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{48}$.

c) Calculați $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^5}\int_0^t f(x)\,dx$.

12. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^4\ln(x+1)$.

a) Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\ln 4}{5} - \frac{47}{300}$.

c) Calculați $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^6}\int_0^t f(x)\,dx$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=10x-x^2$.

a) Arătați că $\int_0^3 f(x)dx = 36$.

b) Arătați că $\int_1^5 \frac{5-x}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{25}{9}$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^{10} f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $I_{n+1} \leq 25 I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=8x-x^2$.

a) Arătați că $\int_0^3 f(x)dx = 27$.

b) Arătați că $\int_1^4 \frac{4-x}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{16}{7}$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^8 f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $I_{n+1} \leq 16 I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

15. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(-6,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5x+6}{x+6}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (x+6)f(x)dx = \frac{17}{2}$.

b)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 5 - 24\ln\frac{7}{6}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 e^x(x+6)^n\big(f(x)\big)^n\,dx$.Demonstrați că $I_n + 5nI_{n-1} = e\cdot 11^n - 6^n$,pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(-5,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+5}{x+5}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (x+5)f(x)dx = 7$.

b)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 4 - 15\ln\frac{6}{5}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 e^x(x+5)^n\big(f(x)\big)^n\,dx$.Demonstrați că $I_n + 4nI_{n-1} = e\cdot 9^n - 5^n$,pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = \frac{17}{6}$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

c)Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx = 1$.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = \frac{1}{6}$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

c)Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx = 1$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^5}$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(\sqrt[5]{x})dx = \frac{e-1}{e}$.

b)Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe$\mathbb{R}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^4}$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(\sqrt[4]{x})dx = \frac{e-1}{e}$.

b)Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(0,+\infty)$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

21. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=arcctgx.

a)Arătați că $\int_1^3 f(\mathrm{ctg}x)dx = 4$.

b)Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

c)Demonstrați că $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2(n+3)} \leq (n+2)\int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n+3}$, pentru orice număr natural nenul n.

22. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)=arctgx.

a)Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} f(\mathrm{tg}x)dx = \frac{3}{2}$.

b)Calculați $\int_0^2 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

c)Demonstrați că $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+3} \leq (n+2)\int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2(n+3)}$, pentru orice număr natural nenul n.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 2 - \frac{2}{e^x+1}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (e^x+1)f(x)\,dx = 2e-2$.

b)Arătați că $\int_{-1}^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx = 0$.

c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 are aria mai mică decât ln4.

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{1}{2^x+1}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (2^x+1)f(x)\,dx = \frac{1}{\ln 2}$.

b)Arătați că $\int_{-1}^1 x\big(f(x)+f(-x)\big)\,dx = 0$.

c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 are aria mai mică decât 1.

25. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = (x+4)^n$, unde n este număr natural nenul.

a)Arătați că $\int_{-4}^0 (x+4)^3\,dx = 64$.

b)Pentru n=1, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx = 4e-3$.

c)Determinați numărul natural nenul n pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=−1 și x=1 are aria egală cu $\frac{98}{n+1}$.

26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = (x+5)^n$, unde n este număr natural nenul.

a)Arătați că $\int_{-5}^0 (x+5)^4\,dx = 625$.

b)Pentru n=1, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx = 5e-4$.

c)Determinați numărul natural nenul n pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=−2 și x=4 are aria egală cu $\frac{702}{n+1}$.

27.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_1^e x^2\ln^n x\,dx$.

a)Arătați că $\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3-1}{3}$.

b)Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$,pentru orice număr natural nenul n.

28.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_1^e x\ln^{n+2}x\,dx$.

a)Arătați că $\int_1^e x\ln^2 x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

b)Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $2I_{n+1} + (n+3)I_n = e^2$,pentru orice număr natural nenul n.

29.Se cosideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = e^x + 4x^3$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-4x^3)\,dx = e-1$.

b) Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{9}{5}$.

c)Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=n are aria egală cu $n^3 - n + 1$.

30.Se cosideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x) = e^x + 6x^2$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-6x^2)\,dx = e-1$.

b) Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{5}{2}$.

c)Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=n are aria egală cu n^2+n+10.

31. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+2)^2}$.

a)Arătați că $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\frac{4}{3}$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c)Determinați numărul real m,m>0,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+2)f(x)$,axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2 are aria egală cu $1-2\ln\frac{m+1}{m}$.

32. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

a)Arătați că $\int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln 2$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c)Determinați numărul real m,m>0,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$,axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=3 are aria egală cu $2-\ln\frac{m+2}{m}$.

33.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+3}dx$.

a)Calculați $\int_0^1 (x^2+2x+3)\,dx$.

b)Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+3I_{n-1}=\frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{6}$.

34.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2017x+2}dx$.

a)Calculați $\int_0^1 (x^2+2017x+2)\,dx$.

b)Demonstrați că $I_{n+1}+2017I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2020}$.

35.Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ și,pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

b)Demonstrați că $I_n\le\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{3}-4nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

36.Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}$ și,pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2(\sqrt{5}-2)$.

b)Demonstrați că $I_n\le\frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{5}-8nI_{n-1}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

37.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

a)Arătați că $\int_1^4 \sqrt{x}f(x)\,dx=\frac{27}{2}$.

b)Arătați că $\int_1^{e^2} (f(x)-\sqrt{x})\ln x\,dx=8$.

c)Determinați numărul real a,a>1,știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(4\ln a+\frac{11}{2}\right)$.

38.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

a)Arătați că $\int_2^4 \sqrt{x}f(x)\,dx=4$.

b)Arătați că $\int_{e^2}^{e^4} \left(\sqrt{x}-f(x)\right)\ln x\,dx=4e^2$.

c)Determinați numărul real a,a>1,știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\ln a$.

39.Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+4}dx$.

a)Arătați că $I_0=1+4\ln\frac{4}{5}$.

b)Demonstrați că $I_{n+1}+4I_n=\frac{1}{n+2}$,pentru orice număr natural n.

c)Arătați că $\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

40.Pentru fiecare număr natural n,se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x+2}dx$.

a)Arătați că $I_0=1+2\ln\frac{2}{3}$.

b)Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{2n+2}$,pentru orice număr natural n.

c)Arătați că $\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{3}$.

41.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x+1)$.

a)Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx=4$.

b)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2 are aria egală cu $e(2e-1)$.

c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^1 (f(x)-e^x)\,dx=0$.

42.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x-3)$.

a)Arătați că $\int_0^6 f(x)e^{-x}\,dx=0$.

b)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=4 și x=7 are aria egală cu $3e^7$.

c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^0 (f(x)+2e^x)\,dx=0$.

43.Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$.

a)Arătați că $\int_3^9 (x-1)f(x)\,dx=\ln 3$.

b)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[4,6]\to\mathbb{R}, g(x)=xf(x)$.

c)Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right)=1$.

44.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x+2)}$.

a)Arătați că $\int_3^{12} (x+2)f(x)\,dx=\ln 4$.

b)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,3]\to\mathbb{R}, g(x)=xf(x)$.

c)Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

45.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \frac{1}{9^n}\int_0^3 (9-x^2)^n dx$.

a)Arătați că $I_1 = 2$.

b)Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

46.Pentru fiecare număr natural nenul n,se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^n(1+x)^n dx$.

a)Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

b)Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n$,pentru orice număr natural nenul n.

47.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

a)Calculați $\int_3^6 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

b)Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{e^2-3}{4e^2}$.

c)Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

48.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x^2}{2x}$.

a)Calculați $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

b)Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$.

c)Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

49.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x)=-\ln x$.

a)Arătați că $\int_1^{e^3} \frac{1}{x}\,dx = 3$.

b)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{1}{e^2}$ și $x=\frac{1}{e}$.

c)Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^{2n} dx = \frac{1}{2019}$.

50.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,$f(x)=\ln x$.

a)Arătați că $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx = 1$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,e] \to \mathbb{R}$,$g(x)=f(x)$.

c)Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^{n} dx = \frac{1}{2018}$.

51.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = (x+1)e^x$.

a)Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x+1} f(x)\,dx = e(e-1)$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0) = 1$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} f(x)\,dx$.Arătați că $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$,pentru orice număr natural n,n≥2.

52.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = xe^x$.

a)Arătați că $\int_2^3 \frac{1}{x} f(x)\,dx = e^2(e-1)$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 0$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătați că $e - I_n = (n+1)I_{n-1}$,pentru orice număr natural n,n≥2.

53.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x + 3x$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-3x)\,dx = e-1$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = e - \frac{1}{2}$.

c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{2}(e^2+12e-13)$.

54.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = e^x - x$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)+x)\,dx = e-1$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = e - \frac{3}{2}$.

c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$,$g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2-4)$.

55.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}$.

a)Calculați $\int_0^5 f^2(x)\,dx$.

b)Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătați că $nI_n = \sqrt{26} - 25(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n,n≥3.

56.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}$.

a)Calculați $\int_0^{\sqrt{6}} f^2(x)\,dx$.

b)Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.Arătați că $nI_n = \sqrt{7} - 6(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n,n≥3.

57. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^2+25}$.

a)Calculați $\int_0^5 f(x)\,dx$.

b)Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{25f(x)+x^2f(x)}{x^4+25}\,dx = \frac{\pi}{40}$.

c)Calculați $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$.

58. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$.

a)Calculați $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b)Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3f(x)+x^2f(x)}{x^4+9}\,dx = \frac{\pi}{24}$.

c)Calculați $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)\,dt$.

59.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e x^3\ln^n x\,dx$.

a)Arătați că $I_1 = \frac{3e^4+1}{16}$.

b)Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

c)Demonstrați că $4I_{n+1} + (n+1)I_n = e^4$ pentru orice număr natural nenul n.

60.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e x^{2017}\ln^n x\,dx$.

a)Arătați că $I_1 = \frac{2017e^{2018}+1}{2018^2}$.
b)Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstrați că $2018I_{n+1} + (n+1)I_n = e^{2018}$ pentru orice număr natural nenul n.
61.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2+x^n}\,dx$.
a)Arătați că $I_1 = 1 - 2\ln\frac{3}{2}$.
b)Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
62.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^n}\,dx$.
a)Arătați că $I_1 = 1 - 4\ln\frac{5}{4}$.
b)Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
63.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}\,dx$.
a)Arătați că $I_3 = \frac{1}{4}\ln 2$.
b)Arătați că $I_{n+4} + I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
64.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+2}\,dx$.
a)Arătați că $I_2 = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$.
b)Arătați că $I_{n+3} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
65.Se consideră funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 2$.
a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_0^a \frac{2x+2}{f(x)}\,dx = \ln 5$.
66.Se consideră funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 2$.
a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{17}{6}$.
b)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
c)Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx = \ln 7$.
67.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x+4}$.
a)Arătați că $\int_0^1 (x^2+2x+4)f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.
b)Arătați că $\int_0^2 (f(x) - x + 2)\,dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
c) Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{1}{16}$.

68.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x+9}$.
a)Arătați că $\int_0^1 (x^2+3x+9)f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.
b)Arătați că $\int_0^3 (f(x) - x + 3)\,dx = \frac{3\pi}{\sqrt{3}}$.
c) Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{1}{36}$.
69.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^{n+2}e^x\,dx$.
a)Calculați I_0.
b)Arătați că $I_{n+1} = (n+3)I_n - 1$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstrați că $I_n = (n+2)!\left((e-2) - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(n+2)!}\right)$,pentru orice număr natural n.
70.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^{n+3}e^x\,dx$.
a)Calculați I_0.
b)Arătați că $I_{n+1} = (n+4)I_n - 1$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Demonstrați că $I_n = (n+3)!\left((e-2) - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(n+3)!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.
71.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\,dx$.
a)Calculați I_1.
b)Arătați că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{4}$.
72.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$.
a)Calculați I_1.
b)Arătați că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+2}$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)I_n = \frac{1}{2}$.
73.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^3 e^{-nx^4}\,dx$.
a)Calculați I_0.
b)Arătați că $I_{n+1} \le I_n$,pentru orice număr natural n.
c)Demonstrați că $I_n = \frac{1}{4n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.
74.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^4 e^{-nx^5}\,dx$.
a)Calculați I_0.
b)Arătați că $I_{n+1} \le I_n$,pentru orice număr natural n.
c)Demonstrați că $I_n = \frac{1}{5n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$,pentru orice număr natural nenul n.
75.Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^{n+3}e^x\,dx$.
a)Calculați I_1.
b)Arătați că $I_{n+1} + (n+4)I_n = e$,pentru orice număr natural nenul n.
c)Arătați că $1 \le (n+1)I_n \le e$,pentru orice număr natural nenul n.
76.Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^{n+2}e^x\,dx$.

a) Calculați I_0.
b) Arătați că $I_{n+1}+(n+3)I_n=e$, pentru orice număr natural n.
c) Arătați că $1\le(n+3)I_n\le e$, pentru orice număr natural n.
77. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^4 x^n e^x\,dx$.
a) Calculați I_0.
b) Arătați că $I_1=3e^4$.
c) Demonstrați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=4^{n+1}e^4-e$, pentru orice număr natural n.
78. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_2^3 x^n e^x\,dx$.
a) Calculați I_0.
b) Arătați că $I_1=2e^3-e^2$.
c) Demonstrați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=3^{n+1}e^3-2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural n.
79. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{\pi}{3}$ și $x=\frac{\pi}{2}$.
a) Calculați aria suprafeței S.
b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.
c) Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^{3n}(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^{3n}(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\ge1$.
80. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{4}$.
a) Calculați aria suprafeței S.
b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.
c) Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^{4n}(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^{4n}(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\ge1$.
81. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-25}{x^2+25}$.
a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+25)f(x)\,dx=-\frac{74}{3}$.
b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_1^5 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.
82. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+36}$.
a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+36)f(x)\,dx=-\frac{107}{3}$.
b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_1^6 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.
83. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+2x+26}$.
a) Arătați că $\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{94}{3}$.
b) Arătați că $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{29}{26}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2+2x+26}$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.
84. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+2x+37}$.

a) Arătați că $\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{127}{3}$.
b) Arătați că $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{40}{37}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)+\frac{1}{x^2+2x+37}$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.
85. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+64}}$.
a) Arătați că $\int_0^1 (x^3+64)f^3(x)\,dx=\frac{1}{3}$.
b) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{65}{64}$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.
86. Se consideră funcția $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+125}}$.
a) Arătați că $\int_0^1 (x^3+125)f^3(x)\,dx=\frac{1}{3}$.
b) Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{126}{125}$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f(x^n)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.
87. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-\frac{2x}{x^2+9}-\frac{8}{x^2+9}$.
a) Arătați că $\int_1^2 (x^2+9)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.
b) Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=3-\ln2-\frac{2\pi}{3}$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.
88. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-\frac{2x}{x^2+12}-\frac{11}{x^2+12}$.
a) Arătați că $\int_1^2 (x^2+12)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.
b) Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx=2-\ln\frac{4}{3}-\frac{11\pi\sqrt{3}}{36}$.
c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.
89. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2(x+5)}{\sqrt{x^2+8x+17}}$.
a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+8x+17}\,dx=11$.
b) Arătați că $\int_0^1 (f^2(x)-4)\,dx=4\ln\frac{26}{17}$.
c) Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n=\infty$.
90. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2(x+6)}{\sqrt{x^2+10x+26}}$.
a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+10x+26}\,dx=13$.
b) Arătați că $\int_0^1 (f^2(x)-4)\,dx=4\ln\frac{37}{26}$.

c)Se consideră numerele reale a și b, cu $0 \le a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \infty$.

91. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)= 8xarctgx .

a)Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}\,dx = 12$.

b)Determinați numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - 4\sqrt{3}$.

c)Demostrați că $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$.

92. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)= 6xarctgx .

a)Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}\,dx = 9$.

b)Determinați numărul real a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - 3\sqrt{3}$.

c)Demostrați că $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$.

93. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+x+4}$.

a)Arătați că $\int_0^2 (x^2+x+4)f(x)dx = 2$.

b)Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\frac{5}{3}$, unde $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.

c)Se consideră numerele reale a și b, cu $0 \le a < b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

94. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+x+5}$.

a)Arătați că $\int_0^2 (x^2+x+5)f(x)dx = 2$.

b)Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\frac{11}{7}$, unde $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.

c)Se consideră numerele reale a și b, cu $0 \le a < b$.Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x)\,dx$.Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

95. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{2x}{x^4+1}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (x^4+1)f(x)dx = \frac{23}{5}$.

b)Se consideră F :ℝ→ℝ o primitivă a funcției f.Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

c)Se consideră funcția G :ℝ→ℝ, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$.Arătați că $\int_0^1 xG(x)\,dx = 1 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

96. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=4+\frac{2x}{x^4+1}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (x^4+1)f(x)dx = \frac{29}{5}$.

b)Se consideră F :ℝ→ℝ o primitivă a funcției f.Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

c)Se consideră funcția G :ℝ→ℝ, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$.Arătați că $\int_0^1 xG(x)\,dx = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

97. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)= x\ln(x+2)$.

a)Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}\,dx = 10$.

b)Demonstrați că $F(\sqrt{3}) < F(2)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

c)Determinați numărul real m, știind că $\int_0^2 f(x)\,dx = m\ln 2 + 1$.

98. Se consideră funcția $f:(2,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)= x\ln(x-2)$.

a)Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-2)}\,dx = 10$.

b)Demonstrați că $F(\sqrt{15}) < F(4)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

c)Determinați numărul real m, știind că $\int_4^6 f(x)\,dx = m\ln 2 - 7$.

99. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)= 3x+e^x + \frac{1}{e^x+1}$.

a)Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{e^2+1}\right)dx = e^2 + 5$.

b)Arătați că $\int_{-1}^1 e^x(f(x) - 3x - e^x)\,dx = 1$.

c)Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x) + f(-x)\big)\,dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$.

100. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)= 4x+e^x + \frac{1}{e^x+1}$.

a)Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{e^2+1}\right)dx = e^2 + 7$.

b)Arătați că $\int_{-1}^1 e^x(f(x) - 4x - e^x)\,dx = 1$.

c)Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 x\big(f(x) + f(-x)\big)\,dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$.

101. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x + \sqrt{x^2+25}$.

a)Arătați că $\int_2^8 (f(x) - \sqrt{x^2+25})dx = 0$.

b)Arătați că $\int_0^{12} \frac{x}{f(x)+x-5}\,dx = 8$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

102. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - x + \sqrt{x^2+36}$.

a)Arătați că $\int_1^{11} (f(x) - \sqrt{x^2+36})dx = 0$.

b)Arătați că $\int_0^{8} \frac{x}{f(x)+x-6}\,dx = 4$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$.Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

103. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+16}$.

a)Arătați că $\int_0^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+16}}\,dx = 8$.

b)Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{61}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, $n \ge 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}\,dx$.Determinați numărul natural n, $n \ge 2$, pentru care $I_{n+2} + 16I_n = \frac{3}{n-1}$.

104. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+25}$.

a)Arătați că $\int_0^6 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 18$.

b)Arătați că $\int_0^{\sqrt{11}} f(x)\,dx = \frac{91}{3}$.

c)Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}dx$.Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 25I_n = \frac{3}{n-1}$.