PĂCURAR CORNEL COSMIN

# MATEMATICĂ PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

Profil : pedagogic

2021

## Mulțimi de numere

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ este mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$este mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$este mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x|x$ este fracție zecimală infinită neperiodică$\}$este mulțimea numerelor iraționale

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ este mulțimea numerelor reale

Pentru $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{Z}$ definim $[x]=n\Leftrightarrow n\leq x<n+1\Leftrightarrow x\in[n,n+1)$ și $\{x\}=x-[x]$.

$[x]$ =partea întreagă a lui x,$\{x\}$ =partea fracționară a lui x .

$x=[x]+\{x\}$.

Ex.$[6{,}73]=6$ $\quad$ $[-6{,}73]=-7$

$|x|=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\geq 0\\ -x, \text{ dacă } x<0\end{cases}$ $\quad$ $|x|$ =modulul lui x,valoarea absolută a lui x

Ex.$|-9|=9$ $\quad$ $|9|=9$

## Principiul includerii și al excluderii

$\text{card}(A\cup B)=\text{card}A+\text{card}B-\text{card}(A\cap B)$

## Formule de calcul prescurtat

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ $\qquad$ $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$

$(a-b)^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3+\cdots+b^{2n})$

## Progresii aritmetice

Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$se numește progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=a_{n-1}+r,\forall n\geq 2$,unde $r\in\mathbb{R}$ se numește rația progresiei.

$a_2=a_1+r, a_3=a_2+r=a_1+2r, a_4=a_3+r=a_1+3r$

Ex. $a_n$:2;6;10;14;18;22;...este o progresie aritmetică cu $a_1=2$ și $r=a_2-a_1=6-2=4$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=a_1+(n-1)r,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n-a_{n-1}=r,\forall n\geq 2$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Rightarrow S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$.

$(a_n)_{n\geq 1}$este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\forall n\geq 2$.

x,y,z sunt în progresie aritmetică$\Leftrightarrow y=\frac{x+z}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+r\\z=y+r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+r\\z=x+2r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y-r\\z=y+r.\end{cases}$

## Progresii geometrice

Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numește progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n=b_{n-1}\cdot q, n\geq 2$,unde $q\neq 0$ se numește rația progresiei,$b_1\neq 0$.

$b_2=b_1\cdot q, b_3=b_2\cdot q=b_1\cdot q^2, b_4=b_3\cdot q=b_1\cdot q^3$.

Ex.$b_n$:3;6;12;24;...este o progresie geometrică cu $b_1=3$ și $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{6}{3}=2$.

$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n\geq 2,\ q\neq 0,\ b_1 \neq 0.$
$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n\geq 2,\ q\neq 0,\ b_1 \neq 0.$
$(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Rightarrow S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} =$
$= \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, pentru $q\neq 1$ și $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = nb_1$, pentru $b_1 = 1$.
x,y,z sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow y^2 = xz \Leftrightarrow \begin{cases} y = xq \\ z = yq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = xq \\ z = xq^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{q} \\ z = yq. \end{cases}$

## Funcții

*Graficul ,imaginea unei funcții*

Fie funcția $f:D\to C$
$G_f = \{(x, f(x)) | x\in D\}$ este graficul funcției f
$\mathcal{G}_f = \{M(x, f(x)) | x\in D\}$ este imaginea geometrică a graficului funcției f
$M(\alpha, \beta)\in\mathcal{G}_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$ și $\alpha\in D$
$Imf = \{f(x)|x\in D\} = \{y\in C | \exists x\in D$ pentru care $f(x) = y\}$ este imaginea funcției f,mulțimea valorilor funcției f

*Intersecția cu axele*

$\mathcal{G}_f \cap Ox \quad \left.\begin{cases} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \quad , \quad \mathcal{G}_f \cap Oy \quad \left.\begin{cases} \mathcal{G}_f: y = f(x) \\ Oy: x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y = f(0)$

*Monotonia funcțiilor*

Pentru $x_1, x_2\in D, x_1 \neq x_2$, definim $R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, numit raport de variație al funcției f
f este strict crescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2\in D$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
f este strict crescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) > 0, \forall x_1, x_2\in D, x_1 \neq x_2$
f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2\in D$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) < 0, \forall x_1, x_2\in D, x_1 \neq x_2$
f este crescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2\in D$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
f este crescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2\in D, x_1 \neq x_2$
f este descrescătoare $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2\in D$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
f este descrescătoare $\Leftrightarrow R(x_1, x_2) \leq 0, \forall x_1, x_2\in D, x_1 \neq x_2$

*Compunerea funcțiilor*

Dacă $f:D\to C$ și $g:E\to D$ definim $f\circ g:E\to C$ și $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
Ex.Pentru $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = 4x - 5$ avem
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 3(4x - 5) + 2 = 12x-15+2 = 12x-13$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4f(x) - 5 = 4(3x + 2) - 5 = 12x+8-5 = 12x+3$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3f(x) + 2 = 3(3x + 2) + 2 = 9x+6+2 = 9x+8$
$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(-5) = -15+2 = -13$
$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(2) = 6+2 = 8$

## Funcția de gradul întâi

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$ se numește funcție de gradul întâi.
$\mathcal{G}_f \cap Ox = \left\{A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\} \qquad \mathcal{G}_f \cap Oy = \{B(0, b)\}$
$a>0 \Leftrightarrow$ f este strict crescătoare $\Rightarrow$ f este crescătoare
$a<0 \Leftrightarrow$ f este strict descrescătoare $\Rightarrow$ f este descrescătoare

*semnul funcției*

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)=ax+b$ | $-$semn a | 0 | semn a |

Ex.Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-6$ avem

$\begin{cases}\mathcal{G}_f: y=f(x)\\ Ox: y=0\end{cases} \Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow 3x-6=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox=\{A(2,0)\}$

$\begin{cases}\mathcal{G}_f: y=f(x)\\ Oy: x=0\end{cases} \Rightarrow y=f(0)=-6 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap Oy=\{B(0,-6)\}$

Dacă, în plus $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=5x+8$ avem

$\begin{cases}\mathcal{G}_f: y=f(x)\\ \mathcal{G}_g: y=g(x)\end{cases} \Rightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x-6=5x+8 \Leftrightarrow 3x-5x=8+6 \Leftrightarrow -2x=14 \Leftrightarrow x=-7 \Rightarrow$

$f(-7)=-27 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_g=\{C(-7,-27)\}$

**Funcția de gradul doi**

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$ se numește funcție de gradul doi.

$\Delta=b^2-4ac$ este discriminantul ecuației $ax^2+bx+c=0$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ este forma canonică a funcției de gradul doi

Graficul funcției de gradul doi este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $x_V=-\frac{b}{2a}$, $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ și care are axa de simetrie $d: x=-\frac{b}{2a}$.

Pentru $a>0$

f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=ax^2+bx+c$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punctul de minim a lui f , $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ este minimul,valoarea minimă a lui f

$Imf=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$ este imaginea funcției f , $\mathcal{G}_f \cap Oy=\{C(0,c)\}$

Pentru $a<0$

f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=ax^2+bx+c$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$x_V=-\frac{b}{2a}$ este punctul de maxim a lui f , $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ este maximul,valoarea maximă a lui f

$Imf=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$ este imaginea funcției f , $\mathcal{G}_f \cap Oy=\{C(0,c)\}$

Cazul 1 $\Delta<0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}\notin\mathbb{R}, x_1\neq x_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox=\emptyset$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)=ax^2+bx+c$ | semn a | |

Cazul 2 $\quad \Delta=0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox = \{D(x_1, 0)\}$

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ | | semn a | 0 | semn a | |

Cazul 3 $\quad \Delta>0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ | | semn a | 0 | $-$semn a | 0 | semna | |

**Relațiile lui Viete**

Pentru ecuația $ax^2 + bx + c = 0$,cu soluțiile $x_1, x_2$ ,sau funcția $f(x)=ax^2 + bx + c$,cu rădăcinile $x_1, x_2$,avem

$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ s_2 = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$S_2=x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2=s_1^2 - 2s_2$

$f(x)=ax^2 + bx + c=a(x - x_1)(x - x_2)$ , $\qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

funcția $g(x)=x^2 - s_1x + s_2$ are rădăcinile $x_1, x_2$ ,ecuația $x^2 - s_1x + s_2 = 0$ are soluțiile $x_1, x_2$

**Vectori în plan**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Dacă ABCD este paralelogram,atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Pentru $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}=(a, b)$,$\vec{u} = c\vec{i} + d\vec{j}=(c, d)$ și $\alpha\in\mathbb{R}$ avem

$\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

$\vec{v} + \vec{u} = (a + c)\vec{i} + (b + d)\vec{j}=(a + c, b + d)$

$\vec{v} - \vec{u} = (a - c)\vec{i} + (b - d)\vec{j}=(a - c, b - d)$

$\alpha\vec{v} = (\alpha a)\vec{i} + (\alpha b)\vec{j}=(\alpha a, \alpha b)$

$\vec{v}, \vec{u}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\vec{v}, \vec{u}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}$ astfel ca $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}|\cos\varphi$ este produsul scalar al vectorilor $\vec{v}, \vec{u}$ ,unde $\varphi\in[0^\circ, 180^\circ]$ este măsura unghiului dintre vectorii $\vec{v}, \vec{u}$

$\vec{v} \cdot \vec{u}$ =ac+bd este expresia analitică a produsului scalar

$\cos\varphi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$

pentru $\vec{v} \neq \vec{0}$ și $\vec{u} \neq \vec{0}$ avem $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ se numește vectorul de poziție al punctului A

$\overrightarrow{AB} =\vec{r}_B - \vec{r}_A$

Pentru $A(x_A, y_A)$,$B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $M(x_M, y_M)$ , $G(x_G, y_G)$ și $O(0,0)$avem

$\overrightarrow{AB} =(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

$|\overrightarrow{AB}| =AB=d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\vec{r}_A=\overrightarrow{OA} = (x_A - x_O, y_A - y_O)=(x_A, y_A)$

M este mijlocul lui [AB] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B}{2}$

G este centrul de greutate al triunghiului ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$

A,B,C coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ colniari
$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ coliniari
ABCD paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (x_D - x_C, y_D - y_C) = (x_A - x_B, y_A - y_B)$
ABCD paralelogram $\Leftrightarrow$[AC], [BD] au acelaşi mijloc $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{x_B+x_D}{2} \\ \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{y_B+y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$
Vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ sunt vectori opuşi, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ,unde $\vec{0}$ este vectorul nul

**Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic**
Fie $\Delta ABC$ ,$m(\sphericalangle BAC) = 90°$,$AD \perp BC$,$D \in BC$
T Pitagora$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$
T catetei$\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = BD \cdot BC \\ AC^2 = CD \cdot BC \end{cases}$
T înălţimii$\Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$
$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$ , $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ $\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$
Dacă M este mijlocul lui [BC]$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = BM = MC = R$,unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC
$\left. \begin{array}{l} m(\sphericalangle A) = 90° \\ m(\sphericalangle B) = 60° \\ m(\sphericalangle C) = 30° \end{array} \right\} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$
Reciproca T Pitagora în $\Delta ABC$,dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ e dreptunghic în A, $m(\sphericalangle BAC) = 90°$

**Relaţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic**
Fie $\Delta ABC$ ,$m(\sphericalangle A) = 90°$,$m(\sphericalangle B) = x°$,$m(\sphericalangle C) = 90° - x°$,BC=a,AB=c,AC=b
$\sin x° = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} = \cos C = \cos(90° - x°) \Rightarrow \sin x° = \cos(90° - x°)$
$\cos x° = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \sin C = \sin(90° - x°) \Rightarrow \cos x° = \sin(90° - x°)$
$\text{tg } x° = \text{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = \text{ctg} C = \text{ctg}(90° - x°) \Rightarrow \text{tg} x° = \text{ctg}(90° - x°)$
$\text{ctg } x° = \text{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \text{tg} C = \text{tg}(90° - x°) \Rightarrow \text{ctg} x° = \text{tg}(90° - x°)$
$\sin^2 x° + \cos^2 x° = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 x° + \cos^2 x° = 1$
$\text{tg } x° = \frac{\sin x°}{\cos x°}$ $\text{ctg } x° = \frac{\cos x°}{\sin x°}$ $\text{tg } x° = \frac{1}{\text{ctg } x°}$ $\text{ctg } x° = \frac{1}{\text{tg } x°}$

| x | $0°=0$ | $30°=\frac{\pi}{6}$ | $45°=\frac{\pi}{4}$ | $60°=\frac{\pi}{3}$ | $90°=\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sinx | $\frac{\sqrt{0}}{2}=0$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}=1$ |
| cosx | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tgx | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |
| ctgx | | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

**Elemente de trigonometrie**

Fie sistemul cartezian xOy,cercul $\mathcal{C}(O, r=1)$,pe care considerăm un sens pozitiv de parcurgere,sens invers acelor de ceasornic,numit sens trigonometric

Fie $M(x_M, y_M) \in \mathcal{C}(O, r=1)$ ,$\varphi \in \mathbb{R}$,astfel ca $m(\sphericalangle xOM)=\varphi$,atunci prin definiție avem

$$\begin{cases} \cos\varphi = x_M \\ \sin\varphi = y_M \end{cases}$$

$tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ,pentru $\cos\varphi\neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\}$

$ctg\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ ,pentru $\sin\varphi\neq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$

*Paritate,imparitate*

$\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $tg(-x)=-tgx$, $ctg(-x)=-ctgx$

*Periodicitate* $\pi=180°$,$\frac{\pi}{2}=90°$

$\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $tg(x+\pi)=tgx$, $ctg(x+\pi)=ctgx$

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$, $tg(x+k\pi)=tgx$, $ctg(x+k\pi)=ctgx$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

$\sin(x°+360°)=\sin x°$, $\cos(x°+360°)=\cos x°$,

$tg(x°+180°)=tgx°$, $ctg(x°+180°)=ctgx°$

$\sin(x°+360°k)=\sin x°$, $\cos(x°+360°k)=\cos x°$,

$tg(x°+180°k)=tgx°$, $ctg(x°+180°k)=ctgx°$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

*Formule*

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ , $\quad$ $\sin^2 x°+\cos^2 x°=1$

$\sin x°=\cos(90°-x°)$, $\cos x°=\sin(90°-x°)$, $tgx°=ctg(90°-x°)$, $ctgx°=ctg(90°-x°)$

$tg\, x°=\frac{1}{ctg\, x°}$ $\quad$ $ctg\, x°=\frac{1}{tg\, x°}$

*Reducerea la primul cadran*

$\sin(180°-x°)=\sin x°$ , $\sin x°=\sin(180°-x°)$

$\cos(180°-x°)=-\cos x°$ , $\cos x°=-\cos(180°-x°)$

$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin x=\sin(\pi-x)$

$\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\cos x=-\cos(\pi-x)$

$\sin(x°-180°)=-\sin x°$ , $\sin(x-\pi)=-\sin x$

$\cos(x°-180°)=-\cos x°$ , $\cos(x-\pi)=-\cos x$

$\sin(360°-x°)=-\sin x°$ , $\sin(2\pi-x)=-\sin x$

$\cos(360°-x°)=\cos x°$ , $\cos(2\pi-x)=\cos x$

*Alte formule*

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ , $\quad$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ , $\quad$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$
$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ , $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ , $\cos 2a=1-2\sin^2 a$
$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$ , $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$ , $tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2a}$
$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ , $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ ,
$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ , $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

**Arii,teorema sinusului,teorema cosinusului**

Fie $\Delta ABC$, $BC=a$,$AB=c$,$AC=b$,$AM\perp MC$,$BN\perp AC$,$CP\perp AB$,$M\in BC$,$N\in AC$,$P\in AB$,$AM=h_a$,$BN=h_b$,$CP=h_c$
$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$
$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}$
$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC
Fie $p=\frac{a+b+c}{2}$
$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=rp$ , unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC
T cosinusului$\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$
T sinusului$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$
Dacă $\Delta ABC$ este echilateral cu latura AB=a,atunci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ şi $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ este înălţimea sa.

**Puteri,radicali,ecuaţii exponenţiale,ecuaţii iraţionale**

*Puteri*
$a^0=1$ pentru $a\neq 0$, $a^1=a$ , $a^2=a\cdot a$ , $a^3=a\cdot a\cdot a$ , $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n factori}}$
$a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$
$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, $a^x:a^y=a^{x-y}$, $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$, $a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$, $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$
$(-a)^2=a^2$ , $(-a)^3=-a^3$ , $(-a)^{2n}=a^{2n}$ , $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$
*Ecuaţii exponenţiale*
Pentru $a>0$,$a\neq 1$,avem
$a^{f(x)}=a^b\Leftrightarrow f(x)=b$ etc.
$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ etc.
$a^{f(x)}=b\Leftrightarrow f(x)=\log_a b$ etc. Pentru $b>0$
Ex. $5^{3x+4}=25\Leftrightarrow 5^{3x+4}=5^2\Leftrightarrow 3x+4=2\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$
$4^x=\frac{1}{8}\Leftrightarrow(2^2)^x=\frac{1}{2^3}\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{-3}\Leftrightarrow 2x=-3\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$
*Radicali de ordin 2*
Pentru $a\geq 0$ definim $\sqrt{a}=b$,unde $b\geq 0$ şi $b^2=a$.
*Proprietăţi*
$\sqrt{a}\geq 0$ , $\sqrt{a}=0\Leftrightarrow a=0$, $\sqrt{a}>0\Leftrightarrow a>0$ , $(\sqrt{a})^2=a$ , $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, a\geq 0\\ -a, a<0\end{cases}$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ , $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$ , $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$

Pentru $a \geq 0$,avem $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$
Pentru $a<0$,avem $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$
Fie $a,b \geq 0$ ,atunci $a<b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
Pentru $\sqrt{f(x)}$ avem c.e. $f(x) \geq 0$.
*Ecuații iraționale*

$\sqrt{f(x)} = b$ c.e. $f(x) \geq 0$

Pentru $b \geq 0$ avem $\sqrt{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^2$ etc.
Pentru $b<0$ avem $\sqrt{f(x)} = b \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ c.e. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^2$ etc.

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ c.e. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ etc.

*Radicali de ordin 3*
Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim $\sqrt[3]{a} = b$,unde $b \in \mathbb{R}$ și $b^3 = a$.
$\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$ , $\sqrt[3]{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$, $\sqrt[3]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\sqrt[3]{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$ ,
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ , $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^n = \sqrt[3]{a^n}$, $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$
$a<b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$
Pentru $\sqrt[3]{f(x)}$ avem c.e. $f(x) \in \mathbb{R}$
*Ecuații iraționale*

$\sqrt[3]{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^3$ etc

$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^3$

$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

**Logaritmi,ecuații logaritmice**
*Logaritmi*
Fie $a>0, a \neq 1, b>0$, avem $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$
Ex. $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2$ , $3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$ , $5^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$
$a^{\log_a x} = x$ , $\log_a a^x = x$ , $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$ , $\log_a a = 1$ , $\log_a a^2 = 2$, $\log_a a^3 = 3$ , $\log_a a^n = n$ , $y = \log_a a^y$
$\log_a A + \log_a B = \log_a(A \cdot B)$ , $\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$ , $n \cdot \log_a A = \log_a A^n$ ,
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ , $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ , $\log_a \sqrt{x} = \frac{\log_a x}{2}$ , $\log_a \sqrt[3]{x} = \frac{\log_a x}{3}$
Pentru $\log_a f(x)$ avem c.e. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$
*Ecuații logaritmice*

$\log_a f(x) = b$ c.e. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a a^b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ etc.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \text{c.e.} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ etc.

$$\log_a f(x) = g(x) \quad \text{c.e.} \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ etc.

**Metode de numărare**

Fie $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ,cardA=n și $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$, numită mulțimea părților

lui A,mulțimea submulțimilor mulțimii A

cardA=n$\Leftrightarrow$card $\mathcal{P}(A)=2^n$

Numărul de submulțimi ordonate de n elemente ale lui A (ale unei mulțimi cu n elemente) este egal cu $P_n = n!$.

$0!=1,\ 1!=1\ ,\ 2!=1\cdot2=2\ ,\ 3!=1\cdot2\cdot3=6, 4!=24, 5!=120, 6!=720$

Pentru $n\geq1$ avem $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$

$(n+1)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1)$

$(n+2)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)=(n+1)!\cdot(n+2)$

Numărul de submulțimi ordonate de k elemente ale lui A (ale unei mulțimi cu n elemente) este egal cu $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}=(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Numărul de submulțimi de k elemente ale lui A (ale unei mulțimi cu n elemente) este egal cu $C_n^k= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}$.

$C_n^k=C_n^{n-k}$ , $C_n^0 = C_n^n =1$ , $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ , $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n =2^n$ , $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n T_{k+1}$ ,

unde $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$ , $k\in\{0,1,2,3,\dots,n\}$

$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k =$

$=\sum_{k=0}^n T_{k+1}$ , unde $T_{k+1}=(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$ , $k\in\{0,1,2,3,\dots,n\}$

Numărul de funcții $f:A\to B$ este egal cu $(\text{card}B)^{\text{card}A}$.

**Matematici financiare, probabilități**

*Procente*

$\frac{a}{b}$ din $c=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$ , $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$p\%=\frac{p}{100}$ , $p\%$din $c=\frac{p}{100}$ din $c=\frac{p}{100}\cdot c=\frac{p\cdot c}{100}$

$p\%$din $x=r \Leftrightarrow \frac{p}{100}\cdot x = r \Leftrightarrow x=r\cdot\frac{100}{p} \Leftrightarrow x=\frac{100r}{p}$

*Taxa pe valoare adăugată*

$P_v = P_p + TVA$ , $TVA=p\%\text{din}P_p$ , $TVA=P_v - P_p$

*Probabilități*

$P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

Ex.Determinați probabilitatea ca alegând,la întâmplare un număr din mulțimea numerelor de două cifre ,acesta să fie pătrat perfect.

$A=\{10,11,12,\ldots,99\}=\{\overline{ab}|a\in\{1,2,3,\ldots,9\}, b\in\{0,1,2,\ldots,9\}\}\Rightarrow cardA=99-9=9\cdot 10=90$=numărul cazurilor posibile

$B=\{x\in A|x$ este pătrat perfect$\}=\{16,25,36,49,64,81\}=\{4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,9^2\}\Rightarrow cardB=9-3=$
$=6$=numărul cazurilor favorabile

$P=\frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

**Elemente de geometrie analitică**

Se consideră sistemul cartezian xOy

*Panta unei drepte*

Fie dreapta d,$m(\sphericalangle d,Ox)=\alpha\in[0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $m_d=tg\alpha$=panta dreptei d

Dacă $d:y=mx+n\Rightarrow m_d=m$

Dacă $d:ax+by+c=0\Leftrightarrow by=-ax-c\Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a}\Rightarrow m_d=-\frac{a}{b}$

Dacă $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$=panta dreptei AB

*Ecuația unei drepte care trece prin două puncte*

$AB:\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{x-x_B}{x_A-x_B}$ , $AB:y-y_B=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot(x-x_B)$ , $AB:\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}=0$

*Ecuația unei drepte care trece printr-un punct și are o pantă dată*

Dacă se știe panta dreptei d, $m_d$ și $A(x_A,y_A)\in d\Rightarrow d:y-y_A=m_d(x-x_A)$

Fie $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$

*Coliniaritate*

A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$

*Aria triunghiului ABC*

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$

*Distanța de la un punct la o dreaptă*

Fie punctul $A(x_A,y_A)$ și $d:ax+by+c=0\Rightarrow d(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

*Condiția ca un punct să aparțină unei drepte*

$A(x_A,y_A)\in d:ax+by+c=0\Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$

*Condiții de paralelism,perpendicularitate*

Fie $d_1:y=m_1x+n_1$ și $d_2:y=m_2x+n_2$ , atunci

$d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow m_1=m_2$

$d_1\perp d_2\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1\Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1$

## Subiectul I(prelucrări bacalaureat)

1.Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_3 = 27$.
2.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m, 4m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 8$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 8x + 16} = 4$.
4.După o ieftinire cu 10%, urmată de o scumpire cu 30 lei, prețul unui obiect este 210 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(1,3)$ .Determinați, în triunghiul AOB, Ecuația medianei din vârful B.
6.Arătați că $\sin 90^\circ - 2\cos 60^\circ = 0$.
7.Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_3 = 32$.
8.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m, 3m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 6$.
9.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = 5$.
10.După o ieftinire cu 10%, urmată de o scumpire cu 50 lei, prețul unui obiect este 220 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
11.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(4,2)$ .Determinați, în triunghiul AOB, Ecuația medianei din vârful A.
12.Arătați că $\sin 90^\circ - 2\sin 30^\circ = 0$.
13.Arătați că $\sqrt{80} + \sqrt{75} - \sqrt{108} + \sqrt{3} + \sqrt{25} - 4\sqrt{5} = 5$.
14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - a$ , unde a este număr real.Determinați numărul real a, pentru care $f(1) = 6$.
15.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-4x - 4} = x$.
16.Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5,6 și 7.
17.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta de ecuație $y=x-4$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptei d cu axa Ox.
18.Se consideră triunghiul ABC cu AB=8, AC=10 și BC=6.Calculați aria triunghiului ABC.
19.Arătați că $\sqrt{80} - \sqrt{75} + \sqrt{108} - \sqrt{3} + \sqrt{25} - 4\sqrt{5} = 5$.
20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$ , unde a este număr real.Determinați numărul real a, pentru care $f(1) = 6$.
21.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x - 4} = x$.
22.Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5 și 6.
23.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta de ecuație $y=x-5$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptei d cu axa Ox.
24.Se consideră triunghiul ABC cu AB=10, AC=8 și BC=6.Calculați aria triunghiului ABC.
25.Arătați că $\sqrt{12} + \sqrt{5} - \sqrt{45} + \sqrt{20} + \sqrt{4} - 2\sqrt{3} = 2$.
26.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 8$.Calculați $f(a)$, unde $a=f(4) - f(2)$.
27.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = x + 1$.
28.După două ieftiniri succesive cu câte 50%, un obiect costă 130 lei.Calculați prețul inițial al obiectului.
29.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-2, -2)$ , $N(0, -2)$ și $P(-4,0)$. Determinați lungimea medianei din vârful N al triunghiului MNP.

30.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu BC=12 și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$.Calculați lungimea laturii AC.

31.Arătați că $2\sqrt{3} - \sqrt{20} - \sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{4} - \sqrt{12} = 2$.

32.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.Calculați f(a), unde a=$f(5) - f(2)$.

33.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 4x + 4} = x + 2$.

34.După două ieftiniri succesive cu câte 50%, un obiect costă 110 lei.Calculați prețul inițial al obiectului.

35.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-2,-2)$ , $N(-2,0)$ și $P(0,-4)$. Determinați lungimea medianei din vârful P al triunghiului MNP.

36.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu BC=10 și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$.Calculați lungimea laturii AC.

37.Arătați că numărul $(\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)^2$ este întreg.

38.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (2m + 1)x - 5$ , unde m este număr real.Determinați numerele reale m, știind că $|f(-1)| = 6$.

39.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x - 4} = 4x - 3$.

40.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților strict mai mare decât cifra zecilor.

41.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$,$B(2,3)$ și $C(a,0)$ unde a este număr real.Determinați numărul real a astfel încât $AC\perp OB$.

42.Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, știind că BC=$4\sqrt{2}$ , AC=8 și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$.

43.Arătați că numărul $(\sqrt{2} + 1)(3\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1)^2$ este întreg.

44.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (2m - 1)x - 5$ , unde m este număr real.Determinați numerele reale m, știind că $|f(-1)| = 4$.

45.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x - 3} = 3x - 2$.

46.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților strict mai mică decât cifra zecilor.

47.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$,$B(3,2)$ și $C(0,a)$ unde a este număr real.Determinați numărul real a astfel încât $AC\perp OB$.

48.Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, știind că BC=$6\sqrt{2}$ , AC=12 și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$.

49.Arătați că $8 \cdot \left(0{,}1(6) + \frac{1}{3}\right) = 4$.

50.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$.Determinați numărul real a pentru care $f(a) = a$.

51.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+5} = 3^{6x}$.

52.Prețul unui obiect este 500 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%.

53.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$ , $B(-1,-4)$ și $C(1,4)$.Demostrați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

54.Arătați că $\cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{3}{2}$.

55.Arătați că $6 \cdot \left(0{,}1(6) + \frac{1}{3}\right) = 3$.

56.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$.Determinați numărul real a pentru care $f(a) = a$.

57.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+5} = 5^{6x}$.

68.Prețul unui obiect este 600 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%.

59.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ , $B(2,5)$ și $C(-2,-5)$.Demostrați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

60.Arătați că $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = \frac{3}{2}$.

61.Arătați că $(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)-(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=3$.

62. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-4$.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)<6$.

63.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+5)=\log_3 25$.

64.Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5,6 și 7.

65.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,6)$ și $N(4,-1)$ .Determinați coordonatele punctului P, simetricul punctului N față de punctul M.

66.Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreptunghic în A,știind că AB=12 și $m(\sphericalangle C)=30^\circ$.

67.Arătați că $(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)-(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)=1$.

68. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)>8$.

69.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+3)=\log_2 48$.

70.Determinați câte numere naturale de cinci cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5 și 6.

71.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,2)$ și $N(-1,6)$ .Determinați coordonatele punctului P, simetricul punctului N față de punctul M.

72.Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreptunghic în A,știind că AC=6 și $m(\sphericalangle B)=30^\circ$.

73.Arătați că $2(5-\sqrt{7})+\sqrt{28}=10$.

74.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^2+a-5$.Determinați numărul real a, pentru care $f(0)=0$.

75.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{10-x}=1$.

76.După două ieftiniri succesive cu câte 50%, un tricou costă 14 lei.Calculați prețul inițial al tricoului.

77.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,5)$ și $N(0,5)$.Calculați lungimea segmentului MN.

78.Calculați lungimea laturii AB triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că BC=15 și $\sin C=\frac{2}{5}$.

79.Arătați că $2(4-\sqrt{6})+\sqrt{24}=8$.

80.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2+a-6$.Determinați numărul real a, pentru care $f(0)=0$.

81.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{4-x}=1$.

82.După două ieftiniri succesive cu câte 50%, un tricou costă 12 lei.Calculați prețul inițial al tricoului.

83.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,5)$ și $N(2,0)$.Calculați lungimea segmentului MN.

84.Calculați lungimea laturii AC triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că BC=30 și $\sin B=\frac{3}{5}$.

85.Arătați că $\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\right):\frac{11}{18}=1$.

86.Determinați numărul real a pentru care $f(1)+f(-1)=4$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$.

87.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(x^2+3)=\log_6(4x)$.

88.Prețul unui obiect este 400 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%.

89.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(-2,3)$ și $B(2,3)$.Determinați distanța de la punctul O la punctul M, unde M este mijlocul segmentului AB.
90.Calculați aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A) = 45°$ și AB=BC=$4\sqrt{2}$.
91.Arătați că $\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{15}{8}=1$.
92.Determinați numărul real a pentru care $f(3)+f(-3)=2$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$.
93.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+2)=\log_5(3x)$.
94.Prețul unui obiect este 800 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 20%.
95.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(2,-3)$ și $B(2,3)$.Determinați distanța de la punctul O la punctul M, unde M este mijlocul segmentului AB.
96.Calculați aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle B) = 45°$ și AB=AC=$2\sqrt{3}$.
97.Arătați că $\sqrt{\frac{25}{36}}-\frac{55}{66}=0$.
98.Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule inecuația $5(x-1)<10$.
99.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+4x+7)=\log_5 3$
100.Determinați câte numere naturale impare de două cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3,6 și 7.
101.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,1)$,$N(6,1)$ și $P(6,6)$.Arătați că triunghiul MNP este isoscel.
102.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu AC=7 și BC=14.Arătați că $m(\sphericalangle B)=30°$.
103.Arătați că $\sqrt{\frac{16}{49}}-\frac{44}{77}=0$.
104.Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule inecuația $3(x-2)<6$.
105.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+6x+13)=\log_5 4$
106.Determinați câte numere naturale pare de două cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3,4 și 5.
107.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,1)$,$N(4,4)$ și $P(1,1)$.Arătați că triunghiul MNP este isoscel.
108.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu AB=8 și BC=16.Arătați că $m(\sphericalangle C)=30°$.
109.Arătați că $\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{5}$.
110.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$.
111.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{11-3x}=36$.
112.Determinați câte numere naturale pare de două cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3,4 și 5.
113.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,6)$,$B(5,6)$ și $C(5,8)$.Arătați că AB=BC.
114.Arătați că $\sin 30°\cdot\cos 60°+\sin 60°\cdot\cos 30°=1$.
115.Arătați că $\sqrt{80}-\sqrt{45}=\sqrt{5}$.
116.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$.
117.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{9-2x}=27$.
118.Determinați câte numere naturale impare de două cifre se pot forma cu cifrele 2,3,4,5 și 6.
119.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$,$B(1,0)$ și $C(5,4)$.Arătați că AB=AC.
120.Arătați că $\sin 45°\cdot\cos 45°-\cos 60°=0$.
121.Arătați că $7\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)=10$.
122.Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f(x)\geq g(x)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ și

$g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ g(x) = x + 5$.
123.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x^2+6} = 6^{7x}$.
124.O firmă folosește 2000 de lei pentru publicitate, sumă care reprezintă 5% din profitul anual al firmei.Calculați profitul anual al firmei.
125.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(5,7)$ și $C(1,4)$.Calculați perimetrul triunghiului ABC.
126.Arătați că $\sin^2 60° + \cos^2 45° = \frac{5}{4}$.
127.Arătați că $4\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right) = 7$.
128.Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f(x) \geq g(x)$, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x) = 4x - 3$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ g(x) = x + 6$.
129.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $13^{x^2+7} = 13^{8x}$.
130.O firmă folosește 7000 de lei pentru publicitate, sumă care reprezintă 1% din profitul anual al firmei.Calculați profitul anual al firmei.
131.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,3)$ și $C(4,6)$.Calculați perimetrul triunghiului ABC.
132.Arătați că $\sin^2 30° + \cos^2 45° = \frac{3}{4}$.
133.Arătați că $\sqrt{64} + \sqrt{25} - \sqrt{169} = 0$.
134.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $5(x + 4) \leq 25$.
135.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x - 9) = \log_2 3$.
136.Prețul unui obiect este 7000 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%.
137.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(5,4)$ și $C(5,2)$.Arătați că patrulaterul AOCB este paralelogram.
138.Calculați aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle C) = 60°$ și AB=AC=8.
139.Arătați că $\sqrt{49} + \sqrt{64} - \sqrt{225} = 0$.
140.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3(x - 2) \leq 9$.
141.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(5x - 15) = \log_5 10$.
142.Prețul unui obiect este 6000 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%.
143.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(6,5)$ și $C(3,5)$.Arătați că patrulaterul AOCB este paralelogram.
144.Calculați aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle B) = 60°$ și AB=BC=10.
145.Arătați că $\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{5} = 0$
146.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x) = x + 1$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, g(x) = 6 - 4x$.
147.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{5-3x} = 49$.
148.Determinați câte numere naturale pare de două cifre se pot forma cu cifrele 3,4,5,6 și 7.
149.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$, $B(4,5)$ și $C(1,2)$.Arătați că AB=AC.
150.Arătați că$\sin 45° \cdot \cos 45° + \sin 30° = 1$.
151.Arătați că $\sqrt{72} - \sqrt{50} - \sqrt{2} = 0$
152.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x) = x + 3$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, g(x) = 7 - 3x$.
153.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{7-2x} = 8$.

154.Determinați câte numere naturale impare de două cifre se pot forma cu cifrele 2,3,4,5 și 6.
155.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(3,2)$ și $C(6,5)$.Arătați că AB=AC.
156.Arătați că $\sin 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0$.
157.Arătați că $\left(4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) : \frac{65}{16} = 1$.
158.Determinați numărul real a pentru care $f(4) + f(-4) = 8$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
159.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x^2+3} = 4^{4x}$.
160.Prețul unui obiect este 400 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, câte 10%.
161.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(3,4)$ și $B(3,-4)$.Determinați distanța de la punctul O la punctul M, știind că M este mijlocul segmentului AB.
162.Calculați aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ și AB=BC=$\sqrt{6}$.
163.Arătați că $\left(5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) : \frac{81}{16} = 1$.
164.Determinați numărul real a pentru care $f(5) + f(-5) = 10$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
165.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x^2+5} = 6^{6x}$.
166.Prețul unui obiect este 500 de lei.Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, câte 10%.
167.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(-2,6)$ și $B(2,6)$.Determinați distanța de la punctul O la punctul M, știind că M este mijlocul segmentului AB.
168.Calculați aria triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$ și AB=AC=$2\sqrt{2}$.
169.Arătați că $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\right) : \frac{51}{25} = 1$.
170.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2017 - x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x - 2017$.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
171.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^{x^2+5x} = 25^{x-4}$.
172.Prețul unui aparat de fotografiat este de 440 de lei.Determinați prețul aparatului de fotografiat după o reducere cu 25%.
173.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5,6)$ și $B(5,6)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
174.Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreprunghic în A știind că AC=12 și $\sin B = \frac{3}{5}$.
175.Arătați că $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\right) : \frac{49}{16} = 1$.
176.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2020 - x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x - 2020$.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
177.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $36^{x^2+11x} = 36^{x-25}$.
178.Prețul unui aparat de fotografiat este de 520 de lei.Determinați prețul aparatului de fotografiat după o reducere cu 25%.
179.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-4)$ și $B(5,4)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
180.Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreprunghic în A știind că AC=8 și $\sin B = \frac{4}{5}$.
181.Scrieți în ordine crescătoare numerele $2018^0$, $\sqrt{36}$ și 7.

182.Determinați coordonatele punctului de inresecție dintre graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 8$ și axa Ox.
183.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $11^{10x+9} = 11^{-1}$.
184.Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,3,5,7 și 9.
185.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$,$B(2,2)$ și $C(2,5)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
186.Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că AC=5 și BC=13.
187.Scrieți în ordine crescătoare numerele $2019^0$, $\sqrt{25}$ și 8.
188.Determinați coordonatele punctului de inresecție dintre graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 8$ și axa Ox.
189.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} = 2^{-1}$.
190.Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,3,5,7 și 9.
191.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$,$B(5,2)$ și $C(2,2)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
192.Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că AC=12 și BC=13.
193.Arătați că $3(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{18} = 6$.
194.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$. Arătați că $f(5) + f(-5) = -10$.
195.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 4) = \log_3 20$.
196.După o scumpire cu 10% prețul unui produs crește cu 90 de lei.Calculați prețul produsului după scumpire.
197.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(5,7)$ și $R(5,9)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
198.Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că AC=50 și $\sin B = \frac{2}{5}$.
199.Arătați că $4(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{32} = 4$.
200.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$. Arătați că $f(6) + f(-6) = -12$.
201.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(x^2 + 1) = \log_6 17$.
202.După o scumpire cu 10% prețul unui produs crește cu 40 de lei.Calculați prețul produsului după scumpire.
203.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(8,4)$ și $R(2,4)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
204.Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că AB=80 și $\sin C = \frac{4}{5}$.
205.Arătați că $6(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{72} = 6$.
206.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$.Arătați că $f(-7) + f(7) = 14$.
207.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 6)^2 - x^2 - 60 = 0$.
208.După o scumpire cu 10% prețul unui produs este 550 de lei.Calculați prețul produsului înainte de scumpire.
209.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(7,4)$ și $R(3,4)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
210.Determinați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că BC=60 și $\cos B = \frac{4}{5}$.
211.Arătați că $3(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{27} = 3$.

212.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.Arătați că $f(-3) + f(3) = 6$.
213.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 7)^2 - x^2 - 63 = 0$.
214.După o scumpire cu 10% prețul unui produs este 660 de lei.Calculați prețul produsului înainte de scumpire.
215.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(6,5)$ și $R(6,1)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
216.Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că BC=30 și $\cos B=\frac{2}{5}$.
217.Calculați suma primilor trei termini ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ , știind că $a_1 = 3$ și $a_3 = 5$.
218.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.Determinați numărul real m pentru care $f(m) = f(1) + f(-1)$.
219.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 5) = 2$.
220.Un obiect costă 5000 de lei.Determinați prețul obiectului după ce acesta se scumpește de două ori, succesiv, cu câte 10%.
221.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$ , $B(-2,2)$ ,$C(-2,-2)$și $D(2,-2)$.Calculați perimetrul patrulaterului ABCD.
222.Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$ și BC=$8\sqrt{2}$.
223.Calculați suma primilor trei termini ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ , știind că $a_1 = 1$ și $a_3 = 7$.
224.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 6$.Determinați numărul real m pentru care $f(m) = f(1) + f(-1)$.
225.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 23) = 3$.
226.Un obiect costă 6000 de lei.Determinați prețul obiectului după ce acesta se scumpește de două ori, succesiv, cu câte 10%.
227.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$ , $B(2,-2)$ ,$C(-2,-2)$și $D(-2,2)$.Calculați perimetrul patrulaterului ABCD.
228.Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$ și BC=$6\sqrt{2}$.
229.Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_1 = 5$ și $r = -5$.Calculați $a_3$.
230.Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + 2$.
231.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 20}$.
232.Un pix costă de trei ori mai mult decât un creion și de nouă ori mai puțin decât un stilou.Determinați cât costă un creion, dacă un stilou costă 90 de lei.
233.Se consideră un paralelogram ABCD și O, punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.Arătați că $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\right)$ .
234.În triunghiul ABC dreptunghic în A, avem AB=3AC și BC=10.Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\sqrt{10}+10$.
235.Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_1 = 6$ și $r = -6$.Calculați $a_3$.
236.Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + 4$.
237.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 30}$.
238.Un pix costă de două ori mai mult decât un creion și de șapte ori mai puțin decât un stilou.Determinați cât costă un creion, dacă un stilou costă 70 de lei.

239.Se consideră un paralelogram ABCD și O, punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.Arătați că $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.
240.În triunghiul ABC dreptunghic în A, avem AC=2AB și BC=10.Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $15\sqrt{2}+10$.
241.Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=4$ și $b_4=-4$.
242.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+2$.Arătați că $f(0)=f(6)$.
243.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-4)=1$.
244.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,4,6,8,9\}$, acesta să fie mai mic sau egal cu media aritmetică a elementelor mulțimii A.
245.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1$ și $d_2$ de ecuații $y=3x-2$, respectiv $y=ax+3$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că dreptele $d_1$ și $d_2$ sunt perpendiculare.
246.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și punctul D∈AB, piciorul bisectoarei unghiului C. Știind că BD=CD, arătați că $m(\sphericalangle ABC)=30^\circ$.
247.Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=-2$ și $b_4=2$.
248.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+3$.Arătați că $f(0)=f(5)$.
249.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-4)=1$.
250.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,5,7,8,9\}$, acesta să fie mai mic sau egal cu media aritmetică a elementelor mulțimii A.
251.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1$ și $d_2$ de ecuații $y=2x-1$, respectiv $y=ax+5$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că dreptele $d_1$ și $d_2$ sunt perpendiculare.
252.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și punctul D∈AC, piciorul bisectoarei unghiului B. Știind că CD=BD, arătați că $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$.
253.Arătați că $\sqrt{63}\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=4$.
254. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x)=x-5$. Determinați numărul natural n pentru care $f(n)\cdot g(n)=0$.
255.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+5}=3^{6x-7}$.
256.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu triplul cifrei zecilor.
257.În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(3,1)$,$B(a,0)$ și $C(5,3)$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
258.Arătați că $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ+\cos 60^\circ-4\sin^2 30^\circ=1$.
259.Arătați că $\sqrt{54}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=3$.
260. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$g(x)=x-4$. Determinați numărul natural n pentru care $f(n)\cdot g(n)=0$.
261.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+6}=3^{6x-3}$.
262.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu triplul cifrei unităților.
263.În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,3)$,$B(0,a)$ și $C(3,5)$, unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că triunghiul ABC este dreptunghic în A.
264.Arătați că $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ+\sin 30^\circ-4\cos^2 60^\circ=1$.

**Legi de compoziție,grupuri**

Fie M o mulțime nevidă.O funcție $\varphi$:M×M→M , $(x, y) \to \varphi(x, y)$,se numește lege de compoziție pe M.
Notăm $\varphi =\circ,*,\oplus, +,\cdot,\odot, \Delta, \perp, \top,\cup,\cap$, etc
Notăm $\varphi(x, y) = x \circ y, x * y, x \oplus y, x + y, x \cdot y, x \odot y, x\Delta y, x \perp y, x\top y, x \cup y, x \cap y$, etc
Fie M o mulțime nevidă și $*$:M×M→M,$(x, y) \to x * y$
$*$ este asociativă $\Leftrightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$,∀x,y,z∈M
$*$ este comutativă $\Leftrightarrow x * y = y * x$,∀x,y,∈M
$*$ admite element neutru ⇔∃e∈M astfel încât $x*e=e*x=x$,∀x∈M
x∈M este simetrizabil în raport cu $*$ ⇔∃x′∈M astfel încât $x*x' = x' * x = e$
$(x')' =x$ , $(ab)' = ba$ , $(abc)'=cba$
Cuplul (M,$*$) se numește grup dacă au loc axiomele :
$G_1$) $(x * y) * z = x * (y * z)$,∀x,y,z∈M,axioma asociativității
$G_2$) ∃e∈M astfel încât $x*e=e*x=x$,∀x∈M,axioma elementului neutru
$G_3$) ∀x∈M,∃x′∈M astfel încât $x*x' = x' * x = e$,axioma elementelor simetrizabile
Grupul (M,$*$) se numește grup abelian dacă are loc și axioma
$G_4$) $x * y = y * x$,∀x,y,∈M,axioma comutativității

**Inelul** $(\mathbb{Z}_n, +,\cdot)$

Fie a∈ℤ și n∈ℕ,n≥1,din teoreama împărțirii cu rest obținem $a=nq+r$,$0\le r<n$,unde q,r∈ℤ sunt unice
Notăm r=amodn
$\widehat{a\oplus b} =(a + b)\text{mod}n$ , $\widehat{a \odot b} = (a + b)\text{mod}n$ ∀a,b∈ℤ
$\mathbb{Z}_n =\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$
$\hat{a}+\hat{b} = \widehat{a\oplus b}$ , $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$ $\forall \hat{a}, \hat{b}\in\mathbb{Z}_n$
$-\hat{a}=\widehat{n-a}$
$\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow (a, n) = 1$ , $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{a}|(a, n) = 1\}$
Dacă p e număr prim $\Rightarrow U(\mathbb{Z}_p) = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots, \widehat{p-1}\}=\mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$

## Subiectul II(prelucrări bacalaureat)

**1)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(xy + 3x + 3y) + 15$.
1.Arătați că $(-3)\circ 3=-3$.
2.Arătați că legea de compoziție „∘" este comutativă.
3.Demonstrați că $x\circ y=2(x + 3)(y + 3) - 3$, pentru orice numere reale x și y.
4.Demonstrați că $e=-\frac{5}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „∘".
5.Determinați numerele x pentru care $(x - 3) \circ (x + 4) = -15$.
6.Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n\circ(n - 3) \le 17$.

**2)** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(xy + 4x + 4y) + 28$.
1.Arătați că $(-4)\circ 4=-4$.
2.Arătați că legea de compoziție „∘" este comutativă.
3.Demonstrați că $x\circ y=2(x + 4)(y + 4) - 4$, pentru orice numere reale x și y.
4.Demonstrați că $e=-\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „∘".
5.Determinați numerele x pentru care $(x - 4) \circ (x + 5) = -20$.
6.Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n\circ(n - 4) \le 20$.

**3)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+3x+3y+6$.
1.Arătați că $(-3)*5=-3$.
2.Demonstrați că $x*y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Verificați dacă $-\frac{17}{6}$ este simetricul lui 3 în raport cu legea de compoziție „$*$".
5.Determinați numerele reale x, știind că $x*x*x=x$.
6.Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n*n=22$.
**4)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+4x+4y+12$.
1.Arătați că $(-4)*6=-4$.
2.Demonstrați că $x*y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Verificați dacă $-\frac{31}{8}$ este simetricul lui 4 în raport cu legea de compoziție „$*$".
5.Determinați numerele reale x, știind că $x*x*x=x$.
6.Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n*n=96$.
**5)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-6x-6y+21$.
1.Arătați că $4*4=5$.
2.Demonstrați că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
3.Arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Verificați dacă $\frac{13}{4}$ este simetricul lui 4 în raport cu legea de compoziție „$*$".
5.Determinați numerele reale x pentru care $(x+3)*(x-3)=3$.
6.Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n*(n+3)\leq 9$.
**6)** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-8x-8y+36$.
1.Arătați că $5*5=6$.
2.Demonstrați că $x*y=2(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.
3.Arătați că $e=\frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Verificați dacă $\frac{17}{4}$ este simetricul lui 5 în raport cu legea de compoziție „$*$".
5.Determinați numerele reale x pentru care $(x+4)*(x-4)=4$.
6.Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n*(n+4)\leq 12$.
**7)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=(x-4)(y-4)+4$.
1.Calculați $\sqrt{4}*\sqrt{16}$.
2.Demostrați că legea că legea de compoziție „$*$" este comutativă.
3.Verificați dacă $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$" .
4.Determinați numerele reale x, pentru care $2^x*4^x=4$.
5.Determinați valorile reale x pentru care $x*(x+1)\leq 16$.
6.Calculați $1*\sqrt{2}*\sqrt{3}*\ldots*\sqrt{20}$.
**8)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=(x-5)(y-5)+5$.
1.Calculați $\sqrt{25}*\sqrt{5}$.
2.Demostrați că legea că legea de compoziție „$*$" este comutativă.
3.Verificați dacă $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$" .

4.Determinați numerele reale x, pentru care $25^x * 5^x = 5$.
5.Determinați valorile reale x pentru care $x*(x+1) \leq 25$.
6.Calculați $1 * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \dots * \sqrt{30}$.
**9)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=5(x+y)+xy+20$.
1.Arătați că $0*(-5)=-5$.
2.Demonstrați că $x*y=(x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
4.Determinați numerele reale x pentru care $(x+3)*(x+3)=20$.
5.Determinați numerele $x \in (0,+\infty)$ pentru care $\lg x * \lg(5x) = -5$.
6.Dați exemplu de numere raționale a și b, care nu sunt întregi, pentru care numărul $a*b$ este întreg.
**10)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=6(x+y)+xy+30$.
1.Arătați că $0*(-6)=-6$.
2.Demonstrați că $x*y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
4.Determinați numerele reale x pentru care $(x+3)*(x+3)=12$.
5.Determinați numerele $x \in (0,+\infty)$ pentru care $\lg x * \lg(6x) = -6$.
6.Dați exemplu de numere raționale a și b, care nu sunt întregi, pentru care numărul $a*b$ este întreg.
**11)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-5(x+y)+30$.
1.Arătați că $1*5=5$.
2.Demonstrați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
4.Determinați numerele naturale n pentru care $n*n \leq n$.
5.Determinați numărul real x pentru care $(6^x * 6^x) * 6^x = 6$.
6.Determinați numerele raționale p și q, știind că $\frac{5}{\sqrt{6}-1} * \frac{5}{\sqrt{6}-1} = p + q\sqrt{6}$.
**12)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-6(x+y)+42$.
1.Arătați că $1*6=6$.
2.Demonstrați că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
4.Determinați numerele naturale n pentru care $n*n \leq n$.
5.Determinați numărul real x pentru care $(2^x * 2^x) * 2^x = 14$.
6.Determinați numerele raționale p și q, știind că $\frac{2}{\sqrt{6}-2} * \frac{2}{\sqrt{6}-2} = p + q\sqrt{6}$.
**13)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y-6$.
1.Arătați că $6*(-7)=-7$.
2.Arătați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
3.Verificați dacă $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
4.Demostrați că $(a+1020)*(1020-a)=1020*1020$, pentru orice număr real a.
5.Determinați numărul real x pentru care $9^x = 3^x * 12$.
6.Determinați numerele naturale n pentru care $n*(n+1) \leq 3$.
**14)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y-7$.
1.Arătați că $7*(-5)=-5$.
2.Arătați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
3.Verificați dacă $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
4.Demostrați că $(a+2011)*(2011-a)=2011*2011$, pentru orice număr real a.
5.Determinați numărul real x pentru care $4^x = 2^x * 9$.

6.Determinați numerele naturale n pentru care $n*(n+1) \leq 6$.
**15)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-7$.
1.Arătați că $7*0=0$.
2.Arătați că legea de compoziție „$*$"este comutativă.
3.Verificați dacă $e=7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
5.Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=-8$.
6.Determinați numerele naturale pare nenule n pentru care $\underbrace{n*n*\ldots*n}_{\text{de 7 ori n}}<7$.
**16)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-5$.
1.Arătați că $5*0=0$.
2.Arătați că legea de compoziție „$*$"este comutativă.
3.Verificați dacă $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
5.Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11=16$.
6.Determinați numerele naturale pare nenule n pentru care $\underbrace{n*n*\ldots*n}_{\text{de 5 ori n}}<5$.
**17)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+5(x+y)+20$.
1.Arătați că $\sqrt{5}*\left(-\sqrt{5}\right)=15$.
2.Arătați că $x*y=(x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Determinați numărul real a pentru care $3*a=27$.
5.Determinați numerele reale x, $x>0$ pentru care $(\log_2 x)*(\log_2 x)=20$.
6.Determinați numerele întregi m pentru care $m*(2-m)\geq 31$.
**18)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+9(x+y)+72$.
1.Arătați că $\sqrt{7}*\left(-\sqrt{7}\right)=65$.
2.Arătați că $x*y=(x+9)(y+9)-9$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=-8$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Determinați numărul real a pentru care $3*a=63$.
5.Determinați numerele reale x, $x>0$ pentru care $(\log_3 x)*(\log_3 x)=16$.
6.Determinați numerele întregi m pentru care $m*(2-m)\geq 91$.
**19)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-16x-16y+256$.
1.Arătați că $16\circ 2016=0$.
2.Arătați că legea de compoziție „$\circ$" este comutativă.
3.Demonstrați că $x\circ y=(x-16)(y-16)$, pentru orice numere reale x și y.
4.Determinați numerele reale x, pentru care $(x-16)\circ x=0$.
5.Arătați că $x^2\circ x^2=(x-4)^2(x+4)^2$, pentru orice număr real x.
6.Determinați numerele naturale a și b, știind că $a\circ b=17$.
**20)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-25x-25y+625$.
1.Arătați că $25\circ 2025=0$.
2.Arătați că legea de compoziție „$\circ$" este comutativă.
3.Demonstrați că $x\circ y=(x-25)(y-25)$, pentru orice numere reale x și y.
4.Determinați numerele reale x, pentru care $(x-25)\circ x=0$.
5.Arătați că $x^2\circ x^2=(x-5)^2(x+5)^2$, pentru orice număr real x.
6.Determinați numerele naturale a și b, știind că $a\circ b=29$.
**21)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+4$.

1.Arătați că $(-1) \circ 1 = 4$.
2.Arătați că legea de compoziție „∘" este asociativă.
3.Verificați dacă e=$-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „∘".
4.Determinați numerele reale x, pentru care $x^2 \circ x = 6$.
5.Demonstrați că $(x^2 - y - 4) \circ (x - y^2) = (x - y)(x + y + 1)$, pentru orice numere reale x și y.
6.Determinați numerele naturale m și n, știind că m∘n=5.
**22)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∘y=x+y+9.
1.Arătați că $(-5) \circ 5 = 9$.
2.Arătați că legea de compoziție „∘" este asociativă.
3.Verificați dacă e=$-9$ este elementul neutru al legii de compoziție „∘".
4.Determinați numerele reale x, pentru care $x^2 \circ x = 11$.
5.Demonstrați că $(x^2 - y - 9) \circ (x - y^2) = (x - y)(x + y + 1)$, pentru orice numere reale x și y.
6.Determinați numerele naturale m și n, știind că m∘n=10.
**23)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y−4.
1.Arătați că $(-2) * 6 = 0$.
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este asociativă.
3.Arătați că $(1 * 2) * (9 * 10) = (1 * 10) * (2 * 9)$.
4.Determinați numărul real x, pentru care $(x * x) * x = x$.
5.Determinați numărul real x, pentru care $4^x * 2^x = 16$.
6.Demonstrați că $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -2$, pentru orice număr real nenul x.
**24)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y−6.
1.Arătați că $(-2) * 8 = 0$.
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este asociativă.
3.Arătați că $(1 * 3) * (7 * 9) = (1 * 9) * (3 * 7)$.
4.Determinați numărul real x, pentru care $(x * x) * x = x$.
5.Determinați numărul real x, pentru care $25^x * 5^x = 24$.
6.Demonstrați că $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -4$, pentru orice număr real nenul x.
**25)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∘y=xy+2x+2y+2.
1.Arătați că $2019 \circ (-2) = -2$.
2.Demonstrați că legea de compoziție „∘" este asociativă.
3.Verificați dacă e=$-1$ este elementul neutru al legii de compoziție „∘".
4.Arătați că x∘x=$(x + 2)^2 - 2$, pentru orice număr real x.
5.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația x∘x∘x∘x=$-1$.
6.Arătați că $x \circ (x + 1) \geq x$, pentru orice număr real x.
**26)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∘y=xy+4x+4y+12.
1.Arătați că $2020 \circ (-4) = -4$.
2.Demonstrați că legea de compoziție „∘" este asociativă.
3.Verificați dacă e=$-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „∘".
4.Arătați că x∘x=$(x + 4)^2 - 4$, pentru orice număr real x.
5.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația x∘x∘x∘x=$-3$.
6.Arătați că $x \circ (x + 1) \geq x$, pentru orice număr real x.
**27)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y−2016.
1.Arătați că 1007∗1009=0.
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este asociativă.
3.Verificați dacă e=2016 este elementul neutru al legii de compoziție „∗".

4.Determinați numărul real x, știind că x∗x=2016.
5.Arătați că $x*(x+2016)=(x+1007)*(x+1009)$, pentru orice număr real x.
6.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x * 25^x = -1986$.
**28)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y−2017.
1.Arătați că 1008∗1009=0.
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este asociativă.
3.Verificați dacă e=2017 este elementul neutru al legii de compoziție „∗".
4.Determinați numărul real x, știind că x∗x=2017.
5.Arătați că $x*(x+2017)=(x+1008)*(x+1009)$, pentru orice număr real x.
6.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x * 25^x = -1987$.
**29)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y+14.
1.Calculați 10∗(−4).
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este asociativă.
3.Verificați dacă e=−14 este element neutru al legii de compoziție „∗".
4.Determinați numerele întregi x știind că $(x^2)*x=196$.
5.Arătați că $x*(x+26)=(x*x)*12$ pentru orice număr real x.
6.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația lgx∗lgx=16.
**30)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=x+y+15.
1.Calculați 12∗(−3).
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este asociativă.
3.Verificați dacă e=−15 este element neutru al legii de compoziție „∗".
4.Determinați numerele întregi x știind că $(x^2)*x=225$.
5.Arătați că $x*(x+29)=(x*x)*14$ pentru orice număr real x.
6.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația lgx∗lgx=17.
**31)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=xy−x−y+7.
1.Calculați 0∗1.
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este comutativă.
3.Arătați că $x*y=(x-1)(y-1)+6$, pentru orice numere reale x și y.
4.Verificați dacă x∗1=6 pentru orice număr real x.
5.Determinați numerele reale x știind că x∗x=10.
6.Determinați numărul perechilor de numere întregi $(m,n)$ știind că m∗n=7.
**32)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție x∗y=xy−3x−3y+13.
1.Calculați 0∗3.
2.Arătați că legea de compoziție „∗" este comutativă.
3.Arătați că $x*y=(x-3)(y-3)+4$, pentru orice numere reale x și y.
4.Verificați dacă x∗3=4 pentru orice număr real x.
5.Determinați numerele reale x știind că x∗x=8.
6.Determinați numărul perechilor de numere întregi $(m,n)$ știind că m∗n=5.
**33)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de x∗y=xy+4x+4y+12.
1.Calculați $(-4)*6$.
2.Arătați că $x*y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere x și y.
3.Verificați dacă e=−3 este elementul neutru al legii „∗".
4.Determinați numerele reale x pentru care x∗x=x.
5.Arătați că $(-4)*x=-4$, pentru orice număr real x.
6.Calculați $(-4)*(-3)*(-2)*\ldots*2017*2018$.

**34)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x*y=xy+5x+5y+20$.
1.Calculați $(-5)*7$.
2.Arătați că $x*y=(x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere x și y.
3.Verificați dacă $e=-4$ este elementul neutru al legii „$*$".
4.Determinați numerele reale x pentru care $x*x=x$.
5.Arătați că $(-5)*x=-5$, pentru orice număr real x.
6.Calculați $(-5)*(-4)*(-3)*\ldots*2018*2019$.
**35)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy+6x+6y+30$.
1.Calculați $7\circ(-6)$.
2.Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$" este comutativă.
3.Arătați că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.
4.Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.
5.Verificați dacă $x\circ(-6)=-6$, pentru orice număr real x.
6.Calculați $(-2019)\circ(-2018)\circ\ldots\circ(-6)$.
**36)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy+7x+7y+42$.
1.Calculați $9\circ(-7)$.
2.Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$" este comutativă.
3.Arătați că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y.
4.Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.
5.Verificați dacă $x\circ(-7)=-7$, pentru orice număr real x.
6.Calculați $(-2018)\circ(-2017)\circ\ldots\circ(-7)$.
**37)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-10(x+y)+55$.
1.Arătați că $0*5=5$.
2.Demonstrați că $x*y=2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=\frac{11}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Determinați numerele reale x pentru care $(x-2)*(x+2)=11$.
5.Determinați numerele reale x pentru care $2^{x^2}*2^{x^2}*2^{x^2}=113$.
6.Dați exemplu de numere raționale p și q, care nu sunt întregi, pentru care numărul $p*q$ este întreg.
**38)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-12(x+y)+78$.
1.Arătați că $0*6=6$.
2.Demonstrați că $x*y=2(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x și y.
3.Verificați dacă $e=\frac{13}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
4.Determinați numerele reale x pentru care $(x-2)*(x+2)=16$.
5.Determinați numerele reale x pentru care $3^{x^2}*3^{x^2}*3^{x^2}=114$.
6.Dați exemplu de numere raționale p și q, care nu sunt întregi, pentru care numărul $p*q$ este întreg.
**39)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2x^2+xy+2y^2$.
1.Arătați că $1\circ 2=12$.
2.Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$" este comutativă.
3.Dacă $a=(1\circ 3)\circ 2$ și $b=1\circ(3\circ 2)$, calculați $b-a$.
4.Determinați numerele x pentru care $x\circ x=20$.
5.Demonstrați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care $x\circ y=0$,atunci $x=y=0$.

6.Determinați numerele x pentru care $3\circ 2^x = 62$.

**40)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2x^2 - xy + 2y^2$.

1.Arătați că $1\circ 2=8$.

2.Demonstrați că legea de compoziție „∘" este comutativă.

3.Dacă $a=(1 \circ 3) \circ 2$ și $b=1\circ(3 \circ 2)$, calculați $b-a$.

4.Determinați numerele x pentru care $x \circ x = 27$.

5.Demonstrați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care $x\circ y=0$,atunci $x=y=0$.

6.Determinați numerele x pentru care $3\circ 2^x = 38$.

**41)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+ay+3$, unde a este număr real.

1.Arătați că pentru orice număr real a, $4*0=7$.

2.Demonstrați că, pentru a=1. legea de compoziție „*" este asociativă.

3.Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „*" este comutativă.

4.Arătați că,dacă legea de compoziție „*" are element neutru, atunci a=1.

5.Pentru a=1, determinați numerele reale x pentru care $(x * x^2) * (x * x^2) = 33$.

6.Pentru $a=-3$, determinați numerele reale x pentru care $4^x * 2^x = 1$.

**42)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+ay+4$, unde a este număr real.

1.Arătați că pentru orice număr real a, $5*0=9$.

2.Demonstrați că, pentru a=1. legea de compoziție „*" este asociativă.

3.Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „*" este comutativă.

4.Arătați că,dacă legea de compoziție „*" are element neutru, atunci a=1.

5.Pentru a=1, determinați numerele reale x pentru care $(x * x^2) * (x * x^2) = 16$.

6.Pentru $a=-4$, determinați numerele reale x pentru care $9^x * 3^x = 1$.

**43)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=-xy+5x+5y-20$.

1.Arătați că $3 * 4 = 3$.

2.Arătați că legea de compoziție „∘" este comutativă.

3.Demonstrați că $x\circ y=-(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y.

4.Demonstrați că $x\circ 5=5$, pentru orice număr real x.

5.Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.

6.Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_1 = -1$ și rația r=2.Arătați că $a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 = 5$.

**44)**Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=-xy+6x+6y-30$.

1.Arătați că $4 * 5 = 4$.

2.Arătați că legea de compoziție „∘" este comutativă.

3.Demonstrați că $x\circ y=-(x - 6)(y - 6) + 6$, pentru orice numere reale x și y.

4.Demonstrați că $x\circ 6=6$, pentru orice număr real x.

5.Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.

6.Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_1 = -3$ și rația r=3.Arătați că $a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 = 6$.

**Matrice ,determinanţi,sisteme de ecuaţii liniare**

*Matrice patratice de ordin doi*

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ $\quad\quad$ $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

*Sisteme liniare de două ecuaţii cu două necunoscute,regula lui Cramer*

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ , $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$ , $d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$

$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \end{cases}$

*Matrice inversabile*

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d=d$ , $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot c=-c$ , $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot b=-b$ , $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot a=a$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_2$ , unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$ $\quad$ , $\quad$ $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

*Matrice patratice de ordin trei*

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+bfg-(gec+afh+bdi)$ $\quad\quad$ $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+t \\ g+p & h+r & i+s \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ d-u & e-v & f-t \\ g-p & h-r & i-s \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h & \alpha i \end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bu+cp & ay+bv+cr & az+bt+cs \\ dx+eu+fp & dy+ev+fr & dz+et+fs \\ gx+hu+ip & gy+hv+ir & gz+ht+is \end{pmatrix}$

*Sisteme liniare de trei ecuații cu trei necunoscute,regula lui Cramer*

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23})\neq 0$

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-(b_3a_{22}a_{13}+b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{12}a_{33})$

$d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-(a_{31}b_2a_{13}+a_{21}b_1a_{33}+a_{11}b_3a_{23})$

$d_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{12}a_{31}b_2-(a_{31}a_{22}b_1+a_{11}a_{32}b_2+a_{21}a_{12}b_3)$

$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \\ z=\frac{d_z}{d} \end{cases}$

*Matrice inversabile*

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}, A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}, A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ , $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_3$ , unde $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$ , $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

## Subiectul III(prelucrări bacalaureat)

**1)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

1.Arătaţi că $\det A = -2$.
2.Calculaţi $\det(A + B)$.
3.Arătaţi că $A\cdot A=B$.
4.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $aA+bB=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 20 & 16\end{pmatrix}$.
5.Arătaţi că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X+A=B$, atunci matricea X este inversabilă.
6.Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $\det(A + B - aI_2) \leq 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**2)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.Arătaţi că $\det A = -2$.
2.Calculaţi $\det(A + B)$.
3.Arătaţi că $A\cdot A=B$.
4.Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $aA+bB=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 2\end{pmatrix}$.
5.Arătaţi că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X+A=B$, atunci matricea X este inversabilă.
6.Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $\det(A + B - aI_2) \leq 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**3)** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1+2a & 3a\\ -2a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
2.Arătaţi că $A(1) + A(5) = 2A(3)$.
3.Arătaţi că $A(-1)\cdot A(2) = A(3)$.
4.Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
5.Demonstraţi că $A(a)\cdot A(1) = A(1)\cdot A(a) = A(1)$, pentru orice număr real a.
6.Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $\det(A(n^3)) > -50$.

**4)** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1+2a & -2a\\ 3a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
2.Arătaţi că $A(1) + A(5) = 2A(3)$.
3.Arătaţi că $A(-1)\cdot A(2) = A(3)$.
4.Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
5.Demonstraţi că $A(a)\cdot A(1) = A(1)\cdot A(a) = A(1)$, pentru orice număr real a.
6.Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $\det(A(n^3)) > -50$.

**5)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.Arătaţi că $\det A=-10$.
2.Arătaţi că $B\cdot B=3I_2-3B$.
3.Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $xA+yB=\begin{pmatrix}-8 & 7\\ -3 & 7\end{pmatrix}$.
4.Determinaţi inversa matricei B .
5.Arătaţi că matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, care verifică egalitatea $A+X=B$, este inversabilă.
6.Demonstraţi că $\det(A + aI_2) > -11$, pentru orice număr real a.

**6)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.Arătaţi că $\det A=-10$.
2.Arătaţi că $B\cdot B=3I_2-3B$.
3.Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $xA+yB=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$.
4.Determinaţi inversa matricei B .
5.Arătaţi că matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, care verifică egalitatea $A+X=B$, este inversabilă.
6.Demonstraţi că $\det(A + aI_2) > -11$, pentru orice număr real a.

**7)**Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = M + 2aI_2$,unde a este număr real.
1.Calculaţi $\det M$.
2.Determinaţi numerele reale a, ştiind că $\det\big(A(a)\big) = 7$.
3.Arătaţi că $M\cdot A(a) = A(a) \cdot M$ , pentru orice număr real a.
4.Determinaţi inversa matricei $A(-1)$.
5.Determinaţi numărul real a, a>0, pentru care suma elementelor matricei $A(\log_2 a)$ este egală cu 71.
6.Demonstraţi că, pentru orice număr întreg m, numărul $\det\big(A(m)\big)$ este natural impar.

**8)**Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = M + 2aI_2$,unde a este număr real.
1.Calculaţi $\det M$.
2.Determinaţi numerele reale a, ştiind că $\det\big(A(a)\big) = 13$.
3.Arătaţi că $M\cdot A(a) = A(a) \cdot M$ , pentru orice număr real a.
4.Determinaţi inversa matricei $A(-1)$.
5.Determinaţi numărul real a, a>0, pentru care suma elementelor matricei $A(\log_2 a)$ este egală cu 71.
6.Demonstraţi că, pentru orice număr întreg m, numărul $\det\big(A(m)\big)$ este natural impar.

**9)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = aA + I_2$,unde a este număr real.
1.Arătaţi că $\det A = 3$.
2.Demonstraţi că $\det\big(M(a)\big) = (a + 1)(3a + 1)$,pentru orice număr real a.
3.Determinaţi inversa matricei $M(-3)$.
4.Arătaţi că $M(1) \cdot M(3) = 4(A \cdot A + I_2)$.
5.Demonstraţi că $\det(M(a) - 3aA) \neq 1$,pentru orice număr întreg nenul a.
6.Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**10)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = aA + I_2$,unde a este număr real.
1.Arătaţi că $\det A = 4$.
2.Demonstraţi că $\det\big(M(a)\big) = (a + 1)(4a + 1)$,pentru orice număr real a.
3.Determinaţi inversa matricei $M(-4)$.
4.Arătaţi că $M(1) \cdot M(4) = 5(A \cdot A + I_2)$.
5.Demonstraţi că $\det(M(a) - 4aA) \neq 1$,pentru orice număr întreg nenul a.
6.Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

**11)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
1.Arătaţi că $\det A=0$.

2.Arătați că A·A=$O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3.Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b)$,pentru orice numere reale a și b.
4.Determinați numerele reale t, știind că $M(t) \cdot M(t^2) = M(42)$.
5.Arătați că inversa matricei $I_2 - A$ este matricea $I_2 + A$.
6.Rezolvați în $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $(I_2 - A) \cdot X = A + I_2$.

**12)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
1.Arătați că detA=0.
2.Arătați că A·A=$O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3.Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b)$,pentru orice numere reale a și b.
4.Determinați numerele reale t, știind că $M(t) \cdot M(t^2) = M(12)$.
5.Arătați că inversa matricei $I_2 + A$ este matricea $I_2 - A$.
6.Rezolvați în $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $(I_2 + A) \cdot X = A - I_2$

**13)**Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = aI_2 + M$, unde a este număr real.
1.Arătați că detM=−3.
2.Calculați suma elementelor matricei A(2018).
3.Arătați că M·M=6M+3$I_2$.
4.Arătați că inversa matricei A(1) este matricea $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
5.Determinați numerele reale a pentru care $A(a) \cdot A(a) = A(a^2) + M \cdot M$
6.Determinați numărul natural m pentru care $\det(A(m)) < 4$.

**14)**Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = aI_2 + M$, unde a este număr real.
1.Arătați că detM=−2.
2.Calculați suma elementelor matricei A(2020).
3.Arătați că M·M=5M+2$I_2$.
4.Arătați că inversa matricei A(1) este matricea $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.
5.Determinați numerele reale a pentru care $A(a) \cdot A(a) = A(a^2) + M \cdot M$
6.Determinați numărul natural m pentru care $\det(A(m)) < 4$.

**15)**Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
1.Arătați că $\det(A(1)) = -5$.
2.Demonstrați că $A(-a) + A(a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
3.Arătați că inversa matricei A(3) este matricea $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
4.Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea A(a) este inversabilă.
5.Determinați numerele reale a pentru care $A(a^2) - 4A(a) + 3A(1) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6.Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a) + A(2)) = a^2 - 15$.

**16)**Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Arătaţi că $\det\left(A(3)\right) = -6$.
2.Demonstraţi că $A(-a) + A(a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
3.Arătaţi că inversa matricei $A(4)$ este matricea $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
4.Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
5.Determinaţi numerele reale a pentru care $A(a^2) - 5A(a) + 4A(1) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6.Determinaţi numerele reale a pentru care $\det\left(A(a) + A(3)\right) = a^2 - 24$.

**17)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
1.Arătaţi că $\det A=1$.
2.Arătaţi că $A\cdot B-B\cdot A=O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3.Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A + xB) = 1 - 2x$.
4.Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5.Arătaţi că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$.
6.Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X-B=I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**18)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
1.Arătaţi că $\det A=1$.
2.Arătaţi că $A\cdot B-B\cdot A=O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3.Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A + xB) = 1 - 6x$.
4.Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5.Arătaţi că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$.
6.Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X-B=I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**19)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = A + aI_2$, unde a este număr real.
1.Arătaţi că $\det A=0$.
2.Determinaţi numerele reale a, pentru care $\det\left(M(a)\right) = 81$.
3.Arătaţi că $M(-3) + M(0) + M(3) = 3A$.
4.Demonstraţi că $M(a) \cdot M(b) = (a + b)A + abI_2$, pentru orice numere reale a şi b.
5.Determinaţi valorile reale ale lui a, pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.
6.Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $M(1) \cdot X = A$.

**20)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = A + aI_2$, unde a este număr real.
1.Arătaţi că $\det A=0$.
2.Determinaţi numerele reale a, pentru care $\det\left(M(a)\right) = 9$.
3.Arătaţi că $M(-2) + M(0) + M(2) = 3A$.
4.Demonstraţi că $M(a) \cdot M(b) = (a + b)A + abI_2$, pentru orice numere reale a şi b.
5.Determinaţi valorile reale ale lui a, pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.
6.Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $M(1) \cdot X = A$.

**21)**Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Arătați că $\det(A(0)) = 16$.
2.Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a)) = 0$.
3.Arătați că $A(4) \cdot A(4) - 8A(4) = O_2$.
4.Determinați numărul real a, pentru care $A(4) \cdot A(a) = 8A(4)$.
5.Demonstrați că $\det(A(a) - A(0)) \leq 0$, pentru orice număr real a.
6.Determinați numerele reale a și b, știind că $A(a) \cdot A(b) = O_2$.

**22)** Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 5 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
1.Arătați că $\det(A(0)) = 25$.
2.Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a)) = 0$.
3.Arătați că $A(5) \cdot A(5) - 10A(5) = O_2$.
4.Determinați numărul real a, pentru care $A(5) \cdot A(a) = 10A(5)$.
5.Demonstrați că $\det(A(a) - A(0)) \leq 0$, pentru orice număr real a.
6.Determinați numerele reale a și b, știind că $A(a) \cdot A(b) = O_2$.

**23)** Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
1.Arătați că $\det B=1$.
2.Determinați numerele reale a, știind că $\det(aA(a)) = 0$.
3.Determinați valorile reale ale lui a, pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
4.Demonstrați că $A(a-3) + A(a+3) = 2A(a)$, pentru orice număr real a.
5.Determinați numărul real a, știind că $\det(A(a) + B) = a + 3$.
6.Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X \cdot A(1) = B$.

**24)** Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
1.Arătați că $\det B=1$.
2.Determinați numerele reale a, știind că $\det(aA(a)) = 0$.
3.Determinați valorile reale ale lui a, pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
4.Demonstrați că $A(a-5) + A(a+5) = 2A(a)$, pentru orice număr real a.
5.Determinați numărul real a, știind că $\det(A(a) + B) = a + 2$.
6.Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X \cdot A(1) = B$.

**25)** Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
1.Arătați că $\det(A(0)) = -3$.
2.Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\det(A(a) - I_2) < 0$.
4.Arătați că $(2a+2)A(a) - A(a) \cdot A(a) = (a^2 + 2a - 3)I_2$, pentru orice număr real a.
5.Determinați inversa matricei $A(3)$.
6.Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) \leq 1$.

**26)** Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
1.Arătați că $\det(A(0)) = -4$.
2.Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\det(A(a) - I_2) < 0$.
4.Arătați că $(2a+3)A(a) - A(a) \cdot A(a) = (a^2 + 3a - 4)I_2$, pentru orice număr real a.
5.Determinați inversa matricei $A(4)$.

6.Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) \le 1$.

**27)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

1.Arătați că $\det A=4$.

2.Determinați numerele reale a și b astfel încât $B-A=5I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3.Pentru $a=0$, determinați numărul real b pentru care $\det B=16$.

4.Determinați numerele reale a și b, știind că $AB=BA$.

5.Arătați că inversa matricei A este matricea $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4}\\ -1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

6.Pentru $a=b=1$, rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $B\cdot X=A$.

**28)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a & 3\\ b & 4\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

1.Arătați că $\det A=3$.

2.Determinați numerele reale a și b astfel încât $B-A=4I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3.Pentru $a=0$, determinați numărul real b pentru care $\det B=9$.

4.Determinați numerele reale a și b, știind că $AB=BA$.

5.Arătați că inversa matricei A este matricea $\begin{pmatrix}0 & -1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

6.Pentru $a=b=1$, rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $B\cdot X=A$.

**29)**Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Calculați $\det(A(0))$.

2.Determinați numărul real a știind că $2A(a)+A(a-9)=3A(0)$.

3.Arătați că $A(1)+A(2)+\cdots+A(9)=9A(5)$.

4. Arătați că $\det(A(a)+A(b))=4\det(A(a)\cdot A(b))$ pentru orice numere reale a și b.

5. Verificați dacă matricea $A(-a)$ este inversa matricei $A(a)$ pentru orice număr real a.

6.Determinați matricea $X=\begin{pmatrix}p & q\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ știind că $X\cdot A(a)=A(a)\cdot X$ pentru orice număr real a.

**30)**Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Calculați $\det(A(0))$.

2.Determinați numărul real a știind că $2A(a)+A(a-12)=3A(0)$.

3.Arătați că $A(1)+A(2)+\cdots+A(11)=11A(6)$.

4. Arătați că $\det(A(a)+A(b))=4\det(A(a)\cdot A(b))$ pentru orice numere reale a și b.

5. Verificați dacă matricea $A(-a)$ este inversa matricei $A(a)$ pentru orice număr real a.

6.Determinați matricea $X=\begin{pmatrix}p & 2\\ q & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ știind că $X\cdot A(a)=A(a)\cdot X$ pentru orice număr real a.

**31)**Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.Calculați $\det A$.

2.Arătați că $A\cdot A+I_2=B$.

3.Verificați dacă $A\cdot B=B\cdot A$.

4.Arătați că matricea C=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ este inversa matricei A.
5.Determinați numerele reale a știind că $\det(A + aI_2) = 17$.
6.Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația A·X=B.

**32)**Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,B=$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1.Calculați detA.
2.Arătați că A·A+$I_2$ = B.
3.Verificați dacă A·B=B·A.
4.Arătați că matricea C=$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ este inversa matricei A.
5.Determinați numerele reale a știind că $\det(A + aI_2) = 26$.
6.Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația A·X=B.

**33)**Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1.Arătați că $\det\left(A(1)\right) = 0$.
2.Calculați $A(1) \cdot A(0)$.
3.Arătați că $\det\left(A(m)\right) = -m^2 + 2m - 1$, pentru orice număr real m.
4.Verificați dacă matricea B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A(0).
5.Determinați numărul real m pentru care suma elementelor matricei A(m) este egală cu 2013.
6.Pentru m=0, rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$.

**34)**Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1.Arătați că $\det\left(A(1)\right) = 0$.
2.Calculați $A(1) \cdot A(0)$.
3.Arătați că $\det\left(A(m)\right) = -m^2 + 2m - 1$, pentru orice număr real m.
4.Verificați dacă matricea B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A(0).
5.Determinați numărul real m pentru care suma elementelor matricei A(m) este egală cu 2013.
6.Pentru m=0, rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$.

**35)**Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
1.Calculați $\det\left(A(0)\right)$.
2.Arătați că $\det\left(A(m)\right) = 5m - 4$, pentru orice număr real m.
3.Determinați numerele reale m pentru care $\det\left(A(m)\right) = m^2$.

4.Arătați că $A(m) + A(-m) = 2A(0)$ pentru orice număr real m.

5.Verificați dacă $A(0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -4I_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.Pentru m=0, rezolvați sistemul $\begin{cases} -x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + mz = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

**36)**Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.Calculați $\det(A(0))$.

2.Arătați că $\det(A(m)) = -5m + 4$, pentru orice număr real m.

3.Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = -m^2$.

4.Arătați că $A(m) + A(-m) = 2A(0)$ pentru orice număr real m.

5.Verificați dacă $A(0) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.Pentru m=0, rezolvați sistemul $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 3 \\ mx + y + 2z = 1 \end{cases}$.

**37)**Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ și $B(b)=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ b & 3 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

1.Arătați că $\det(A(4))=3$.

2.Arătați că $A(3) \cdot B(3) = 3(A(3) + B(3))$.

3.Determinați inversa matricei $A(1)$ .

4.Demonstrați că $\det(A(a) + B(b)) = \det(A(a)) + \det(B(b))$ dacă și numai dacă a=b.

5.Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $C(a)=B(a) \cdot A(a)$ este inversabilă.

6.Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\det(A(n)) > n^2 - 5$.

**38)**Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(b)=\begin{pmatrix} 4 & b \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

1.Arătați că $\det(A(5))=4$.

2.Arătați că $A(4) \cdot B(4) = 4(A(4) + B(4))$.

3.Determinați inversa matricei $A(1)$ .

4.Demonstrați că $\det(A(a) + B(b)) = \det(A(a)) + \det(B(b))$ dacă și numai dacă a=b.

5.Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $C(a)=B(a) \cdot A(a)$ este inversabilă.

6.Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\det(A(n)) > n^2 - 21$.

**39)**Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

1.Arătați că $\det(A(5)) = 4$.

2.Calculați $\det(A(1) + A(2))$.

3.Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = 2A(a + b)$, pentru orice numere reale a și b.

4.Determinați numărul real a și b pentru care $A(a) \cdot A(2a) = 2A(30)$.

5.Determinați numerele reale x pentru care $\det(I_2 + xA(x)) = 36$.

6.Determinați numerele naturale n pentru care $A(n) \cdot A(n) = 2A(2n^2)$.

**40)** Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
1.Arătați că $\det(A(6))=9$.
2.Calculați $\det(A(1)+A(2))$.
3.Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=3A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
4.Determinați numărul real a și b pentru care $A(a)\cdot A(3a)=3A(40)$.
5.Determinați numerele reale x pentru care $\det(I_2+xA(x))=49$.
6.Determinați numerele naturale n pentru care $A(n)\cdot A(n)=3A(2n^2)$.
**41)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $0_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
1.Arătați că $\det A=7$.
2.Arătați că $(A-I_2)(A-7I_2)=0_2$.
3.Se consideră matricea $B=A-4I_2$. Demonstrați că suma elementelor matricei $B\cdot B$ este divizibilă cu $2\cdot 3^2$.
4.Determinați numerele reale a pentru care $\det(aA+I_2)=0$.
5.Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot M=M\cdot A$, unde $M=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & 2\end{pmatrix}$.
6.Demonstrați că $\det(A+xI_2)+\det(A-xI_2)\geq 14$, pentru orice număr real x.
**42)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $0_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
1.Arătați că $\det A=11$.
2.Arătați că $(A-I_2)(A-11I_2)=0_2$.
3.Se consideră matricea $B=A-6I_2$. Demonstrați că suma elementelor matricei $B\cdot B$ este divizibilă cu $5^2$.
4.Determinați numerele reale a pentru care $\det(aA+I_2)=0$.
5.Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot M=M\cdot A$, unde $M=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & 2\end{pmatrix}$.
6.Demonstrați că $\det(A+xI_2)+\det(A-xI_2)\geq 22$, pentru orice număr real x.
**43)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
1.Arătați că $\det A=48$.
2.Arătați că $B(2)+B(4)=2B(3)$.
3.Arătați că $\det(B(x))=1$, pentru orice număr real x.
4.Arătați că $B(x)\cdot B(y)=B(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5.Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
6.Determinați perechile de numere naturale (m, n), pentru care $B(2^m)\cdot B(2^n)=B(2^{m+n}-2)$.
**44)** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
1.Arătați că $\det A=27$.
2.Arătați că $B(3)+B(5)=2B(4)$.
3.Arătați că $\det(B(x))=1$, pentru orice număr real x.
4.Arătați că $B(x)\cdot B(y)=B(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5.Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
6.Determinați perechile de numere naturale (m, n), pentru care $B(2^m)\cdot B(2^n)=B(2^{m+n}+1)$.