PĂCURAR CORNEL COSMIN

MATEMATICĂ PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

Profil : tehnologic

2021

Elemente de geometrie analitică

Se consideră sistemul cartezian xOy

Panta unei drepte

Fie dreapta d,$m(\sphericalangle d, Ox) = \alpha \in [0,\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $m_d = tg\alpha$=panta dreptei d

Dacă d:$y=mx+n \Rightarrow m_d = m$

Dacă d:$ax+by+c=0 \Leftrightarrow by=-ax-c \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a} \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b}$

Dacă $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B) \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$=panta dreptei AB

Ecuația unei drepte care trece prin două puncte

AB:$\frac{y-y_B}{y_A-y_B} = \frac{x-x_B}{x_A-x_B}$, AB:$y-y_B = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot(x-x_B)$, AB:$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ecuația unei drepte care trece printr-un punct și are o pantă dată

Dacă se știe panta dreptei d, m_d și $A(x_A,y_A) \in d \Rightarrow d: y-y_A = m_d(x-x_A)$

Fie $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$

Coliniaritate

A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Aria triunghiului ABC

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie punctul $A(x_A,y_A)$ și d:$ax+by+c=0 \Rightarrow d(A,d) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Condiția ca un punct să aparțină unei drepte

$A(x_A,y_A) \in d: ax+by+c=0 \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$

Condiții de paralelism,perpendicularitate

Fie $d_1: y=m_1x+n_1$ și $d_2: y=m_2x+n_2$, atunci

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2} = -1 \Leftrightarrow m_1\cdot m_2 = -1$

Subiectul I (prelucrări bacalaureat)

1.Arătați că $6\sqrt{2} - 2(\sqrt{18}-1) = 2$.

2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.Calculați $f(0)\cdot f(-1)\cdot f(-2)\cdot f(-3)$.

3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(10x-5) = \log_3 5$.

4.După o scumpire cu 10%, un obiect costă 660 de lei.Determinați prețul inițial al obiectului.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,4),B(2,0) și C(0,2).Calculați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC.

6.Arătați că $\frac{\sin 60^\circ}{1+\cos 60^\circ} = tg30^\circ$.

7.Arătați că $6\sqrt{2} + 2(1-\sqrt{18}) = 2$.

8.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)$.

9.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(10x-6) = \log_3 4$.

10.După o scumpire cu 10%, un obiect costă 330 de lei.Determinați prețul inițial al obiectului.

11.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,5),B(0,5) și C(6,1).Calculați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC.

12.Arătați că $\frac{\cos 30^\circ}{1+\sin 30^\circ} = ctg60^\circ$.

13.Arătați că $\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{25} = 1$.

14.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+6$.Determinați numărul real m, știind că $f(m-1) = m$.

15.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x-5) = \log_5 9$.

16.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={10,20,30,40,50,60,70,80,90}, acesta să fie multiplu de 5.

17.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(2,6),N(6,2) și P(6,5).Calculați aria triunghiului MNP.

18.Arătați că $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$.

19.Arătați că $\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{25}{7} = 1$.

20.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+4$.Determinați numărul real m, știind că $f(m-1) = m$.

21.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x-3) = \log_3 7$.

22.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={10,20,30,40,50,60,70,80,90}, acesta să fie multiplu de 2.

23.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(5,2),N(2,6) și P(5,6).Calculați aria triunghiului MNP.

24.Arătați că $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$.

25.Arătați că $\sqrt{5}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{5} = 5$.

26.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x) = x^2+5x+4$.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.

27.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{13}(x^2+25) = 2$.

28.După o ieftinire cu 30%, prețul unui obiect este 350 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.

29.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,2)$, $B(3,2)$ și $C(-3,6)$.Determinați, în triunghiul ABC, lungimea medianei din vârful A.

30.Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 45^\circ = \frac{1}{4}$.

31.Arătați că $\sqrt{6}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6} = 6$.

32.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 4$.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.
33.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{13}(x^2 + 144) = 2$.
34.După o ieftinire cu 20%, prețul unui obiect este 320 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
35.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(-3,2)$ și $C(-3,6)$.Determinați, în triunghiul ABC, lungimea medianei din vârful B.
36.Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{4}$.
37.Arătați că $\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) : \left(1 + \frac{1}{20}\right) = 1$.
38.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 25$. Arătați că $f(-5) + f(5) = 4f(0)$.
39.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 64) = \log_2(x - 4)^2$.
40.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea
$M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,39\}$, acesta să fie număr par.
41.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,5)$ și $B(6,3)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.
42. Arătați că $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ - 2\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0$.
43.Arătați că $\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(1 - \frac{1}{20}\right) = 1$.
44.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 36$. Arătați că $f(-6) + f(6) = 4f(0)$.
45.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(x^2 - 125) = \log_6(x - 5)^2$.
46.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea
$M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,99\}$, acesta să fie număr par.
47.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(5,3)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.
48. Arătați că $\cos^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ - 2\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0$.
49. Arătați că numărul $N=(5 - 4i)^2 + (4 + 5i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$.
50. Determinați numerele reale a , știind că punctul $A(a, a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x) = 12 - x^2$.
51.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 4^{x+1} = 20$.
52.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{81}\}$, acesta să fie număr natural.
53.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,3)$, $B(4,5)$ și $C(2,3)$.Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
54.Demonstrați că $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$, pentru orice număr real x.
55. Arătați că numărul $N=(3 + 2i)^2 + (2 - 3i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$.
56. Determinați numerele reale a , știind că punctul $A(a, a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x) = 20 - x^2$.
57.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^x + 6^{x+1} = 42$.
58.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}\}$, acesta să fie număr natural.
59.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(3,5)$ și $C(5,1)$.Determinați lungimea medianei din A a triunghiului ABC.
60.Demonstrați că $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$, pentru orice număr real x.

61.Arătați că $\left(1 - \sqrt{7}\right)^2 + \sqrt{28} = 8$.
62.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
63.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x \cdot 27^{2x+1} = 81^{3x}$.
64.Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 14.
65.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a, a - 2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul A se află pe dreapta de ecuație $y=3x+1$.
66.Demonstrați că $(3\sin x - 2\cos x)^2 + (2\sin x + 3\cos x)^2 = 13$, pentru orice număr real x.
67.Arătați că $\left(1 + \sqrt{7}\right)^2 - \sqrt{28} = 8$.
68.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
69.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \cdot 8^{2x+1} = 16^{3x}$.
70.Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 10.
71.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a, a + 2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul A se află pe dreapta de ecuație $y=3x-1$.
72.Demonstrați că $(3\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - 3\cos x)^2 = 13$, pentru orice număr real x.
73.Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} = 5$.
74.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.Determinați numerele reale a pentru care
$f(a) + f(a + 1) = 1$.
75.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-6} = 25$.
76.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea
$M=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60\}$, acesta să fie un număr divizibil cu 10.
77.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$,$B(2,3)$.Calculați lungimea segmentului OM, unde M este mijlocul segmentului AB.
78.Arătați că $2\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin^2 60^\circ = \frac{7}{4}$.
79.Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{6} = 12$.
80.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$.Determinați numerele reale a pentru care
$f(a) + f(a - 1) = 5$.
81.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x-4} = 49$.
82.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea
$M=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80\}$, acesta să fie un număr divizibil cu 10.
83.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$,$B(3,6)$.Calculați lungimea segmentului OM, unde M este mijlocul segmentului AB.
84.Arătați că $2\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{3}{4}$.
85.Arătați că $\left(2 + \frac{1}{2}\right)(2 - 0{,}5) = \frac{15}{4}$.
86. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x - 3$ și
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 5 - 4x$.
87.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x + 2) = \log_5 7$.
88.După o ieftinire cu 40%, prețul unui obiect este 600 de lei.Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.

89.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,12)$ și $B(8,0)$.Determinați lungimea medianei din vârful O în triunghiul AOB.
90.Arătați că $(\cos 60^\circ + \sin 30^\circ) - \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 0$.
91.Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right)(2 + 0{,}5) = \frac{15}{4}$.
92. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x - 5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 3 - 4x$.
93.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x + 6) = \log_3 9$.
94.După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 900 de lei.Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
95.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,8)$ și $B(12,0)$.Determinați lungimea medianei din vârful O în triunghiul AOB.
96.Arătați că $(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ) - \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 0$.
97.Arătați că $90 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0{,}3\right) = 3$.
98.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3x + a = 0$, unde a este număr real.Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1x_2 - 3 < 0$.
99.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2} = 8^x$.
100.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 5.
101.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,-3)$ și $B(4,4)$.Demonstrați că punctele A, O și B sunt coliniare.
102.Demonstrați că $(\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x.
103.Arătați că $10 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0{,}2\right) = 3$.
104.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + a = 0$, unde a este număr real.Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1x_2 - 4 < 0$.
105.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} = 27^x$.
106.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 6.
107.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$ și $B(5,5)$.Demonstrați că punctele A, O și B sunt coliniare.
108.Demonstrați că $(\cos x - \sin x)^2 + \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x.
109.Arătați că $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 3) + \sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0$.
110.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3$.Determinați numerele reale a, știind că $f(a) = -2a$.
111.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{6x-4} = 9^x$.
112.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A={1,2,3,4,5}, acesta să verifice relația $2^n \geq 8$.
113.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,1)$, $N(4,3)$ și $P(1,6)$. Determinați lungimea segmentului PQ, unde Q este mijlocul segmentului MN.
114. Arătați că $\sin 60^\circ + \cos 45^\circ - \cos 30^\circ - \sin 45^\circ = 0$.
115.Arătați că $\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2) + \sqrt{2}(\sqrt{6} - 3) = 0$.
116.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3$.Determinați numerele reale a, știind că $f(a) = 2a$.
117.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{7x-5} = 9^x$.
118.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A={1,2,3,4,5}, acesta să verifice relația $2^n \leq 4$.

119.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$, $N(4,3)$ și $P(6,1)$. Determinați lungimea segmentului NQ, unde Q este mijlocul segmentului MP.
120. Arătați că $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \cos 60^\circ - \sin 45^\circ = 0$.
121. Arătați că numărul $n= \sqrt{8}(\sqrt{2} - 2) + 4\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.
122. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = -3x + 1$.Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
123.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 8x + 10} = x + 1$.
124.Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii {3,4,5,6,7}.
125.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(0,3)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO și este paralelă cu dreapta AB.
126.Arătați că $(\sin x - 6\cos x)^2 + (6\sin x + \cos x)^2 = 37$, pentru orice număr real x.
127. Arătați că numărul $n=\sqrt{8}(\sqrt{2} + 2) - 4\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.
128. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x - 2$.Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
129.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 - 8x + 10} = x - 1$.
130.Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii {4,5,6,7,8}.
131.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,0)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO și este paralelă cu dreapta AB.
132.Arătați că $(\sin x + 6\cos x)^2 + (6\sin x - \cos x)^2 = 37$, pentru orice număr real x.
133.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 4$ și $b_4 = 32$.
134.Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, 3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 7$.
135.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3 12$.
136.Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 3.
137.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$,$B(6,6)$ și $C(11,8)$.Arătați că AC=2AB.
138.Calculați aria triunghiului MNP, știind că MN=8 și $m(\sphericalangle N) = m(\sphericalangle P) = 75^\circ$.
139.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_4 = 24$.
140.Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, 3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
141.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 2) = \log_3 12$.
142.Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 2.
143.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$,$B(6,6)$ și $C(8,11)$.Arătați că AC=2AB.
144.Calculați aria triunghiului MNP, știind că MN=10 și $m(\sphericalangle N) = m(\sphericalangle P) = 75^\circ$.
145.Arătați că $\left(5 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{5}{12} = 2$.
146.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(2,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$.
147.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + x + 4} = 2$.
148.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să verifice egalitatea $(n - 3)(n - 5) = 0$.
149.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,4)$,$N(3,4)$ și $P(3,0)$.Calculați perimetrul triunghiului MNP.
150.Arătați că $\cos^2 120^\circ - \sin^2 30^\circ = 0$.

151.Arătați că $\left(4+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{12}{17}=3$.
152.Determinați numărul real m, știind că punctul A(1,8) aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$.
153.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-x+1}=1$.
154.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să verifice egalitatea $(n-2)(n-6)=0$.
155.În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(1,3),N(1,0) și P(5,0).Calculați perimetrul triunghiului MNP.
156.Arătați că $\sin^2 150^\circ-\cos^2 60^\circ=0$.
157.Arătați că $\left(3-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{3}=8$.
158. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3$.Calculați $f(-3)\cdot f(3)$.
159.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x+2}=25$.
160.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={11,22,33,44,55,66,77,88,99}, acesta să fie multiplu de 2.
161.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) și B(3,−2).Arătați că AO=OB.
162.Arătați că $\sin^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ=\frac{3}{4}$.
163.Arătați că $\left(5-\frac{1}{5}\right):\frac{1}{5}=24$.
164. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4$.Calculați $f(0)\cdot f(1)$.
165.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+3}=27$.
166.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={11,22,33,44,55,66,77,88,99}, acesta să fie multiplu de 2.
167.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,1) și B(4,−1).Arătați că AO=OB.
168.Arătați că $\sin^2 60^\circ-\cos^2 45^\circ=\frac{1}{4}$.
169.Arătați că $\left(4+\frac{1}{4}\right):\frac{17}{8}=2$.
170.Arătați că $\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-6x+5=0$.
171.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2}=16$.
172.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, acesta să fie multiplu de 4.
173.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,0) și B(0,4).Calculați perimetrul triunghiului OAB.
174.Arătați că $\sin^2 120^\circ+\sin^2 30^\circ=1$.
175.Arătați că $\left(5-\frac{1}{5}\right):\frac{24}{25}=5$.
176.Arătați că $\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}=-1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+4x+3=0$.
177.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-1}=125$.
178.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie multiplu de 2.
179.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,9) și B(12,0).Calculați perimetrul triunghiului OAB.
180.Arătați că $\sin^2 135^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.
181.Arătați că $\left(3+\frac{1}{4}\right):\frac{13}{8}=2$.

182.Arătați că $(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+5x+4=0$.
183.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+7}=4$.
184.După o ieftinire cu 20%, prețul unui televizor este 600 de lei.Determinați prețul televizorului înainte de ieftinire.
185.În reperul cartezian xOy se consideră punctele O(0,0) și M(6,8).Calculați distanța dintre punctele O și M.
186.Arătați că $\sin^2 30^\circ+\sin^2 120^\circ=1$.
187.Arătați că $\left(4+\frac{1}{2}\right):\frac{9}{6}=3$.
188.Arătați că $(x_1+x_2)^2+6x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+5x-4=0$.
189.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x-9}=4$.
190.După o ieftinire cu 25%, prețul unui televizor este 1200 de lei.Determinați prețul televizorului înainte de ieftinire.
191.În reperul cartezian xOy se consideră punctele O(0,0) și M(12,9).Calculați distanța dintre punctele O și M.
192.Arătați că $\cos^2 45^\circ+\cos^2 135^\circ=1$.
193.Arătați că $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right):\frac{9}{20}=1$.
194.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+2$.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.
195.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2+4)=\lg 8$.
196.După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 450 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
197.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,4) și B(3,2).Calculați distanța de la punctul O(0,0) la mijlocul segmentului AB.
198.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$, arătați că $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.
199.Arătați că $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right):\frac{11}{30}=1$.
200.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+3$.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.
201.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2+5)=\lg 21$.
202.După o ieftinire cu 20%, prețul unui obiect este 320 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
203.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,3) și B(5,3).Calculați distanța de la punctul O(0,0) la mijlocul segmentului AB.
204.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{1}{2}$, arătați că $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
205.Arătați că $\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\left(1-2\sqrt{5}\right)^2=30$.
206.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x$.Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)$.
207.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x=4^{2x+3}$.
208.După o scumpire cu 20%, prețul unui obiect este 240 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.
209.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,1),B(5,5) și C(1,5).Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
210.Arătați că $\sin 60^\circ-\operatorname{tg}45^\circ=\cos 30^\circ-\operatorname{ctg}45^\circ$.
211.Arătați că $\left(1+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2=20$.

212.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$.Calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$.
213.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x = 9^{2x-1}$.
214.După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 500 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.
215.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$,$B(3,3)$ și $C(2,2)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
216.Arătați că $\sin 60^\circ + \mathrm{ctg} 45^\circ = \cos 30^\circ + \mathrm{tg} 45^\circ$.
217.Arătați că $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \frac{1}{3} = 1$.
218.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 9$.Calculați $f(-3) + f(3)$.
219.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x+6} = 6$.
220.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, acesta să fie multiplu de 5.
221.În reperul cartezian xOy se consideră $O(0,0)$,$A(0,6)$ și $B(6,0)$.Arătați că triunghiul AOB este isoscel.
222.Calculați aria triunghiului ABC, dreptunghic în A cu AB=4 și AC=3.
223.Arătați că $\left(1 - \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{6} = 1$.
224.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 16$.Calculați $f(-4) + f(4)$.
225.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{6x+7} = 7$.
226.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, acesta să fie multiplu de 3.
227.În reperul cartezian xOy se consideră $O(0,0)$,$A(0,3)$ și $B(3,0)$.Arătați că triunghiul AOB este isoscel.
228.Calculați aria triunghiului ABC, dreptunghic în B cu AB=4 și BC=3.
229.Arătați că $\frac{1}{2} : 0{,}5 - 1 = 0$.
230.Arătați că $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 0$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 9x + 18 = 0$.
231.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+4} = 6$.
232.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10},acesta să fie divizibil cu 2.
233.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(0,4)$.Calculați lungimea segmentului AB.
234.Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $BC=6\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$.
235.Arătați că $1 - 0{,}5 : \frac{1}{2} = 0$.
236.Arătați că $3(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 6$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 10x + 24 = 0$.
237.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{6x+1} = 5$.
238.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, acesta să fie divizibil cu 3.
239.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(12,0)$ și $B(0,16)$.Calculați lungimea segmentului AB.
240.Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $BC=4\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$.
241.Arătați că $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{30} = 1$.

242.Arătați că $4(x_1 + x_2) + 3x_1x_2 = -2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + 5x + 6 = 0$.
243.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 2$.
244.După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 90 de lei.Determinați prețul obiectului înaite de ieftinire.
245.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,1)$ și $B(4,1)$.Calculați lungimea segmentului AB.
246.Dacă $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{5}{13}$, arătați că $\sin x = \frac{12}{13}$.
247.Arătați că $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{15} = 2$.
248.Arătați că $4(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 3$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 6x + 7 = 0$.
249.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = 3$.
250.După o ieftinire cu 20%, prețul unui obiect este 90 de lei.Determinați prețul obiectului înaite de ieftinire.
251.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,7)$ și $B(3,1)$.Calculați lungimea segmentului AB.
252.Dacă $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{12}{13}$, arătați că $\sin x = \frac{5}{13}$.
253.Arătați că $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{21}{4} = 1$.
254.Determinați numărul real a, știind că punctul $A(4,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2a$.
255.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 6$.
256.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M={10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120}, acesta să fie multiplu de 30.
257.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,6)$ și $B(7,6)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
258.Dacă $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{12}{13}$, arătați că $\mathrm{tg} x = \frac{12}{5}$.
259.Arătați că $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{35}{2} = 1$.
260.Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - a$.
261.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = 5$.
262.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M={10,20,30,40,50,60,70,80,90}, acesta să fie multiplu de 40.
263.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(4,7)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
264.Dacă $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{3}{5}$, arătați că $\mathrm{tg} x = \frac{4}{3}$.
265.Arătați că $1 - \frac{1}{4} : 0{,}25 = 0$.
266.Calculați $f(-2) \cdot f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$.
267.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+1} = 5$.
268.Un obiect costă 300 de lei.Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 20%.
269.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,4)$ și $B(7,2)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
270.Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că AC=6 și $B = \frac{\pi}{4}$.

271.Arătați că $0,25 : \frac{1}{4} - 1 = 0$.
272.Calculați $f(-1) \cdot f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
273.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x - 1} = 3$.
274.Un obiect costă 200 de lei.Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.
275.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(5,6)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
276.Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că AB=10 și C= $\frac{\pi}{4}$.
277.Arătați că $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$.
278.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ cu axa Ox.
279.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x + 1) = 2$.
280.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$, acesta să fie divizor al lui 3000.
281.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(0,6)$ și $B(8,0)$.Calculați perimetrul triunghiului AOB.
282.Arătați că sinx= $\frac{15}{25}$, știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și cosx= $\frac{20}{25}$.
283.Arătați că $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}$.
284.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 4$ cu axa Ox.
285.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(2x - 1) = 2$.
286.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizor al lui 2000.
287.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(9,0)$ și $B(0,12)$.Calculați perimetrul triunghiului AOB.
288.Arătați că sinx= $\frac{9}{15}$, știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și cosx= $\frac{12}{15}$.
289.Determinați numerele reale a și b, pentru care $\frac{10}{3-i} = a + ib$, unde $i^2 = -1$.
290.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$.Calculați $\left(f(-1) + f(0)\right)^{2018}$.
291.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x^2-3x+5} = 216$.
292.Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 5 elevi din totalul de 6 elevi pe care îi are la dispoziție un antrenor.
293.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(2m + 1,0)$, unde m este număr real.Determinați numărul real m, știind că punctul $C(6,0)$ este mijlocul segmentului AB.
294.Se consideră triunghiul ABC în care AB=5,AC=12 și BC=13.Calculați cosC.
295.Determinați numerele reale a și b, pentru care $\frac{26}{5+i} = a + ib$, unde $i^2 = -1$.
296.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 9$.Calculați $\left(f(3) + f(\sqrt{8})\right)^{2016}$.
297.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-4x+7} = 81$.
298.Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 6 elevi din totalul de 7 elevi pe care îi are la dispoziție un antrenor.
299.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ și $B(2m + 4,0)$, unde m este număr real.Determinați numărul real m, știind că punctul $C(12,0)$ este mijlocul segmentului AB.

300.Se consideră triunghiul ABC în care AB=12,AC=5 și BC=13.Calculați cosC.
301.Arătați că media geometrică a numerelor a=16 și b=25 este egală cu 20.
302.Determinați numărul real m pentru care $f(4) = 0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.
303.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x+1} = 5^7$.
304.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să fie multiplu de 2.
305.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,5)$ și $B(6,5)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB:
306.Arătați că sinx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și cosx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
307.Arătați că media geometrică a numerelor a=9 și b=16 este egală cu 12.
308.Determinați numărul real m pentru care $f(5) = 0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - m$.
309.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 3^5$.
310.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, acesta să fie multiplu de 4.
311.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$ și $B(9,3)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB:
312.Arătați că sinx= $\frac{1}{3}$, știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și cosx= $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
313.Arătați că $0,5 : \frac{1}{4} - 2 = 0$.
314.Calculați $f(-1) + f(0) + f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$.
315.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x + 1} = 7$.
316.Un obiect costă 450 lei.Calculați prețul obiectului după o scumpire cu 30%.
317.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$ și $B(5,3)$.Determinați distanța de la punctul A la punctul B.
318.Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că AC=8 și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$.
319.Arătați că $0,5 : \frac{1}{2} - 1 = 0$.
320.Calculați $f(-3) + f(0) + f(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$.
321.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x + 1} = 6$.
322.Un obiect costă 250 lei.Calculați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
323.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ și $B(3,2)$.Determinați distanța de la punctul A la punctul B.
324.Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că AB=4 și $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$.
325.Arătați că $\frac{6}{\sqrt{7}-1} - \sqrt{7} = 1$.
326.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 + x + 2018$.
327.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x + 4} = 4$.
328.După o reducere cu 10% un obiect costă 9990 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de reducere.
329.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,1)$ și $N(7,1)$.Determinați lungimea segmentului MN.
330.Arătați că $\sin x = \frac{2}{5}$, știind că $x\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

331.Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{3} = -1$.
332.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 2019$.
333.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+6} = 6$.
334.După o reducere cu 30% un obiect costă 98 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de reducere.
335.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $N(8,3)$.Determinați lungimea segmentului MN.
336.Arătați că $\sin x = \frac{12}{13}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{5}{13}$.
337.Arătați că $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{14}{3} = 3$.
338.Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a, 0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$.
339.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+5} = 6$.
340.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 12.
341.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(3,6)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
342.Arătați că $\sin x = \frac{24}{25}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{7}{25}$.
343.Arătați că $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{24}{7} = 2$.
344.Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a, 2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.
345.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+5} = 4$.
346.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$, acesta să fie multiplu de 15.
347.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(4,7)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
348.Arătați că $\sin x = \frac{8}{17}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{15}{17}$.
349.Arătați că $\left(5 - \frac{1}{5}\right) : \frac{6}{5} = 4$.
350.Calculați $f(-4) + f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 16$.
351.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 5$.
352.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să fie multiplu de 5.
353.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$M(0,3)$ și $N(3,0)$.Arătați că triunghiul MON este isoscel.
354.Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că AB=12 și AC=10.
355.Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{12} = 6$.
356.Calculați $f(-6) + f(6)$, unde $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 36$.
357.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+1} = 7$.
358.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, acesta să fie multiplu de 6.
359.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$M(0,7)$ și $N(7,0)$.Arătați că triunghiul

MON este isoscel.
360.Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că AB=10 și AC=16.
361.Calculați media aritmetică a numerelor $a=3\left(4-\sqrt{5}\right)$ și $b=3\sqrt{5}$.
362.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$ cu axa Ox.
363.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+1) - \log_5 3 = 0$.
364.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 6.
365.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,6)$ și $B(5,6)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
366.Arătați că $\sin(a+b) = \frac{84}{85}$, știind că $a,b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,$\sin a = \frac{4}{5}$ și $\sin b = \frac{8}{17}$.
367.Calculați media aritmetică a numerelor $a=2\left(6-\sqrt{6}\right)$ și $b=2\sqrt{6}$.
368.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ cu axa Ox.
369.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4x-1) - \log_2 3 = 0$.
370.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 2.
371.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(6,2)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
372.Arătați că $\sin(a+b) = \frac{63}{65}$, știind că $a,b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,$\cos a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = \frac{12}{13}$.
373.Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_3 = 3$.
374.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, g(x) = 4x - 4$.
375.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3-x} = \frac{1}{27}$.
376.După o ieftinire cu 15%, prețul unui obiect este 68 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
377.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(3,2)$ și $C(-5,2)$.Calculați lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.
378.Arătați că $\operatorname{tg}45^\circ \operatorname{ctg}60^\circ + \operatorname{tg}60^\circ \operatorname{ctg}45^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
379.Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_3 = 6$.
380.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, g(x) = 4x - 2$.
381.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2-x} = \frac{1}{16}$.
382.După o ieftinire cu 25%, prețul unui obiect este 36 de lei.Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.
383.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ și $C(5,2)$.Calculați lungimea medianei din vârful B al triunghiului ABC.
384.Arătați că $\operatorname{tg}30^\circ \operatorname{ctg}45^\circ + \operatorname{tg}45^\circ \operatorname{ctg}30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
385.Arătați că $6\cdot\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) = 4$.

386.Determinați numărul real m știind că $f(m) = 1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 6$.
387.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 4} = 6$.
388.În anul 2015, profitul anual al unei firme a fost de 200000 de lei, ceea ce reprezintă 8% din valoarea veniturilor anuale ale firmei.Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2015.
389.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$, $B(5,6)$ și $C(2,6)$.Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.
390.Arătați că $tg^2 60° + ctg^2 45° = 4$.
391.Arătați că $7 \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) = 1$.
392.Determinați numărul real m știind că $f(m) = 3$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$.
393.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x^2 + 4} = 4$.
394.În anul 2016, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 5% din valoarea veniturilor anuale ale firmei.Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2016.
395.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,7)$, $B(2,7)$ și $C(5,3)$.Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.
396.Arătați că $ctg^2 30° + tg^2 45° = 4$.
397.Arătați că $\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} = 4$.
398.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ cu axa Ox.
399.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} = 5^2$.
400.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 9.
401.În reperul cartezian xOy se consideră $A(1,2)$, $B(3,2)$ și $C(3,4)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
402.Determinați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că BC=12 și $m(\sphericalangle C) = 30°$.
403.Arătați că $\left(1 - \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} = 4$.
404.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ cu axa Ox.
405.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} = 3^4$.
406.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 7.
407.În reperul cartezian xOy se consideră $A(2,2)$, $B(4,2)$ și $C(4,4)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
408.Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că BC=14 și $m(\sphericalangle B) = 30°$.
409.Pentru a=5 arătați că $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{21}{10}$.
410.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + 5$.
411.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.
412.Prețul unei imprimante este 120 de lei.Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 20%.

413.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,4)$, $B(4,7)$ și $C(7,6)$.Determinați perimetrul triunghiului ABC.
414.Calculați cosA știind că $\sin A = \frac{1}{2}$ și unghiul A este ascuțit.
415.Pentru a=6 arătați că $\frac{a}{5} - \frac{5}{a} = \frac{11}{12}$.
416.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$.
417.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 11} = 6$.
418.Prețul unei imprimante este 240 de lei.Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 10%.
419.În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(2,4)$ și $C(6,4)$.Determinați perimetrul triunghiului ABC.
420.Calculați cosA știind că $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și unghiul A este ascuțit.
421.Arătați că $\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = 1$.
422.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 6$ cu axa Oy.
423.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x-2} = 16$.
424.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 6.
425.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$,$B(5,2)$ și $C(5,5)$.Arătați că AB=BC.
426.Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că AB=5 și BC=13.
427.Arătați că $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 3$.
428.Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ cu axa Oy.
429.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{4x-1} = 27$.
430.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 7.
431.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$,$B(5,3)$ și $C(5,5)$.Arătați că AB=BC.
432.Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că AB=4 și BC=5.
433.Arătați că $4\left(2 + \sqrt{3}\right) - 4\sqrt{3} = 8$.
434.Determinați numărul real a știind că $f(3) = a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 1$.
435.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x + 2) = \log_3 10$.
436.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 15.
437.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(3,5)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
438.Arătați că $\sin^2 60° + \cos^2 45° = \frac{5}{4}$.
439.Arătați că $6\left(2 - \sqrt{5}\right) + 6\sqrt{5} = 12$.
440.Determinați numărul real a știind că $f(2) = a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 4$.
441.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x + 2) = \log_2 5$.
442.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 30.
443.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$ și $B(5,3)$.Calculați distanța de la punctul

A la punctul B.
444.Arătați că $\sin^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ = -\frac{1}{4}$.
445.Arătați că $6 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) = 4$.
446.Determinați numărul real m știind că $f(m) = 1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 6$.
447.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 4} = 6$.
448.În anul 2015, profitul anual al unei firme a fost de 200000 de lei, ceea ce reprezintă 8% din valoarea veniturilor anuale ale firmei.Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2015.
449.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,2)$, $B(5,6)$ și $C(2,6)$.Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.
450.Arătați că $tg^2 60^\circ + ctg^2 45^\circ = 4$.
451.Arătați că $7 \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) = 1$.
452.Determinați numărul real m știind că $f(m) = 3$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$.
453.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x^2 + 4} = 4$.
454.În anul 2016, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 5% din valoarea veniturilor anuale ale firmei.Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2016.
455.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,7)$, $B(2,7)$ și $C(5,3)$.Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.
456.Arătați că $ctg^2 30^\circ + tg^2 45^\circ = 4$.
457.Să se arate că numărul $2(4 + \sqrt{2}) - \sqrt{8}$ este natural.
458.Calculați $f(1) + f(2) + \cdots + f(20)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.
459.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 15) = \log_3(8x)$.
460.După o scumpire cu 20% prețul unui obiect este 360 de lei.Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.
461.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(3,1)$ și $R(3,3)$.Determinați coordonatele punctului Q , știind că R este mijlocul segmentului PQ.
462.Arătați că $\sin 170^\circ + \sin 30^\circ - \sin 10^\circ = \frac{1}{2}$.
463.Să se arate că numărul $3(4 - \sqrt{3}) + \sqrt{27}$ este natural.
464.Calculați $f(1) + f(2) + \cdots + f(10)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x + 2$.
465.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 8) = \log_2(6x)$.
466.După o scumpire cu 30% prețul unui obiect este 520 de lei.Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.
467.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(4,1)$ și $R(4,4)$.Determinați coordonatele punctului Q , știind că R este mijlocul segmentului PQ.
468.Arătați că $\sin 40^\circ + \sin 30^\circ - \sin 140^\circ = \frac{1}{2}$.
469.Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 3$.
470.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2018x - 2019$.Calculați $\left(f(1)\right)^{2020}$.
471.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{6-5x} = 3^{x-6}$.
472.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 14.

473.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-3)$ și $B(1,-1)$.Determinați ecuația dreptei AB.
474.Arătați că $\sqrt{3}\sin 60^\circ + \sqrt{2}\sin 45^\circ = \frac{5}{2}$.
475.Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 6$.
476.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2019x - 2020$.Calculați $\left(f(1)\right)^{2021}$.
477.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2-4x} = 2^{x+7}$.
478.Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 11.
479.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ și $B(-2,1)$.Determinați ecuația dreptei AB.
480.Arătați că $\sqrt{3}\cos 30^\circ + \sqrt{2}\cos 45^\circ = \frac{5}{2}$.
481.Arătați că $3(3 + \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} = 9$.
482.Calculați $f(6) + f(-6)$ pentru funția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 6$.
483.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{3x} = 125$.
484.Prețul unui obiect este 1000 de lei.Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
485.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(1,4)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
486.Calculați $\sin 60^\circ - \sin 120^\circ$.
487.Arătați că $2(2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} = 4$.
488.Calculați $f(4) + f(-4)$ pentru funția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$.
489.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{4x} = 81$.
490.Prețul unui obiect este 3000 de lei.Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.
491.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$ și $B(6,1)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
492.Calculați $\sin 30^\circ - \sin 150^\circ$.
493.Arătați $4(4 - \sqrt{2}) + 4\sqrt{2} = 16$.
494.Calculați $f(-3) + f(3)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.
495.Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $(x - 5)^2 - x^2 + 30 = 0$.
496.Prețul unui obiect este 300 de lei.Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.
497.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(5,4)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
498.Calculați cosA, știind că $\sin A = \frac{1}{3}$ și unghiul A este ascuțit.
499.Arătați $3(6 - \sqrt{3}) + 3\sqrt{3} = 18$.
500.Calculați $f(-7) + f(7)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 49$.
501.Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $(x + 2)^2 - x^2 - 8 = 0$.
502.Prețul unui obiect este 100 de lei.Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 20%.
503.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,4)$ și $B(5,3)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
504.Calculați cosA, știind că $\sin A = \frac{2}{5}$ și unghiul A este ascuțit.
505.Arătați că $2(6 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} = 12$.
506.Calculați $f(-5) + f(5)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 25$.

507.Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $9^{2x} = 81$.
508.Prețul unui obiect este 200 de lei.Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
509.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,4)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
510.Calculați $\cos 20^\circ + \cos 160^\circ$.
511.Arătați că $3(5+\sqrt{2}) - 3\sqrt{2} = 15$.
512.Calculați $f(-8) + f(8)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 64$.
513.Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^{4x} = 81$.
514.Prețul unui obiect este 300 de lei.Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.
515.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$ și $B(4,2)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
516.Calculați $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$.
517.Arătați că $4(3+\sqrt{5}) - 4\sqrt{5} = 12$.
518.Calculați $f(0) \cdot f(-5)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 5$.
519.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-4} = 625$.
520.Prețul unui obiect este 300 de lei.Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
521.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(3,6)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
522.Calculați $\cos 5^\circ + \cos 175^\circ$.
523.Arătați că $5(3-\sqrt{5}) + 5\sqrt{5} = 15$.
524.Calculați $f(0) \cdot f(-4)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 4$.
525.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x-3} = 27$.
526.Prețul unui obiect este 400 de lei.Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 30%.
527.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,6)$ și $B(5,6)$.Calculați distanța de la punctul A la punctul B.
528.Calculați $\cos 65^\circ + \cos 115^\circ$.
529.Arătați că $2(4+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} = 8$.
530.Calculați $f(-4) \cdot f(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$.
531.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+3) = \log_2 3$.
532.Prețul unui obiect este 1000 de lei.Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 20%.
533.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(3,1)$ și $R(3,5)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
534.Calculați cosB știind că $\sin B = \frac{4}{5}$ și unghiul B este ascuțit.
535.Arătați că $4(2-\sqrt{2}) + 4\sqrt{2} = 8$.
536.Calculați $f(-5) \cdot f(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 4$.
537.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+1) = \log_5 1$.
538.Prețul unui obiect este 2000 de lei.Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 10%.
539.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(4,3)$ și $R(2,3)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului PR.
540.Calculați cosB știind că $\sin B = \frac{3}{5}$ și unghiul B este ascuțit.
541.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x-5)^2 = 25$.
542.Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3mx + 2$ are abscisa egală cu $-\frac{3}{2}$.

543.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{3x} = 125$.
544.Calculați $6C_7^2 - A_5^2$.
545.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,3)$ și $B(2,7)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB).
546.Calculați lungimea diagonalei BD a rombului ABCD în care CD=8 și $m(\sphericalangle ABC) = 120^\circ$.
547.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(4x+3)^2 = 9$.
548.Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2mx + 1$ are abscisa egală cu4.
549.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{4x} = 81$.
550.Calculați $4C_3^2 - A_4^2$.
551.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,3)$ și $B(-2,-5)$.Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB).
552.Calculați lungimea diagonalei BD a rombului ABCD în care BC=4 și $m(\sphericalangle ABC) = 120^\circ$.
553. Arătați că $(12 + 2 \cdot 3)(12 - 2 \cdot 3) = 108$.
554. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 7x + 12 = 0$. Arătați că $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -2$.
555.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 2023) = 2\log_2 3$.
556.Un obiect costă 500 de lei.Determinați prețul obectului după o scumpire cu 10%.
557.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$, $B(2,2)$.Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.
558.Arătați că $\sin 50^\circ + \cos 140^\circ = 0$.
559. Arătați că $(12 - 2 \cdot 3)(12 + 2 \cdot 3) = 108$.
560. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 7x + 12 = 0$. Arătați că $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 2$.
561.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 2022) = 2\log_2 3$.
562.Un obiect costă 600 de lei.Determinați prețul obectului după o scumpire cu 10%.
563.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(2,2)$.Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.
564.Arătați că $\sin 70^\circ + \cos 160^\circ = 0$.
565.Arătați că $\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 6$.
566.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 3$. Arătați că $f(2) = f(3)$.
567.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 30) = \log_2 6$.
568.După o scumpire cu 10%, un obiect costă 550 de lei.Determinați prețul inițial al obiectului.
569.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$ și $B(4,0)$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, determinați coordonatele punctului M.
570.În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 60^\circ$.Calculați sinusul unghiului C.
571.Arătați că $\sqrt{11}(1 + 2\sqrt{11}) - \sqrt{11} = 22$.
572.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 6$. Arătați că $f(1) = f(2)$.
573.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2 - 40) = \log_7 9$.
574.După o scumpire cu 10%, un obiect costă 660 de lei.Determinați prețul inițial al obiectului.
575.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ și $B(0,4)$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, determinați coordonatele punctului M.
576.În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 60^\circ$.Calculați cosinusul unghiului B.
577.Arătați că $\sqrt{5}(3\sqrt{5} + 2) - 2\sqrt{5} = 15$.
578.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 3$.Determinați numerele reale a pentru care $f(a) = 3$.
579.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3} = 2$.

580.După o ieftinire cu 10%, un obiect costă 460 de lei.Determinați prețul inițial al obiectului.
581.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,6)$, $B(1,-6)$ și $C(6,0)$.Determinați lungimea înălțimii din vârful C în triunghiul ABC.
582.Arătați că $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ+\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{5}{2}$.
583.Arătați că $\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+3\right)-3\sqrt{3}=6$.
584.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.
585.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-4}=3$.
586.După o ieftinire cu 10%, un obiect costă 550 de lei.Determinați prețul inițial al obiectului.
587.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(-3,1)$ și $C(0,3)$.Determinați lungimea înălțimii din vârful C în triunghiul ABC.
588.Arătați că $\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ-\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\frac{1}{2}$.
589.Arătați că $\left(10-\frac{1}{3}\right)\left(10+\frac{1}{3}\right)=\frac{899}{9}$.
590.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=15-x$.
591.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+9)=2$.
592.După o ieftinire cu 30%, prețul unei tablete este 1400 de lei.Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.
593.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(7,2)$ .Punctul M este mijlocul segmentului AB.Calculați lungimea segmentului AM.
594.Arătați că $2\cos^2 60^\circ-\cos^2 45^\circ=0$.
595.Arătați că $\left(10+\frac{1}{3}\right)\left(10-\frac{1}{3}\right)=\frac{899}{9}$.
596.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=10-x$.
597.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2+16)=2$.
598.După o ieftinire cu 20%, prețul unei tablete este 1600 de lei.Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.
599.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(4,7)$ .Punctul M este mijlocul segmentului AB.Calculați lungimea segmentului AM.
600.Arătați că $2\cos^2 60^\circ-\sin^2 45^\circ=0$.

Matrice ,determinanți,sisteme de ecuații liniare

Matrice patratice de ordin doi

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și $\alpha\in\mathbb{R}$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$, $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

Sisteme liniare de două ecuații cu două necunoscute,regula lui Cramer

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$, $d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$

$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \end{cases}$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d=d$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot c=-c$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot b=-b$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot a=a$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$, $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Matrice patratice de ordin trei

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}$ și $\alpha\in\mathbb{R}$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+bfg-(gec+afh+bdi)$, $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+t \\ g+p & h+r & i+s \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ d-u & e-v & f-t \\ g-p & h-r & i-s \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h & \alpha i \end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bu+cp & ay+bv+cr & az+bt+cs \\ dx+eu+fp & dy+ev+fr & dz+et+fs \\ gx+hu+ip & gy+hv+ir & gz+ht+is \end{pmatrix}$

Sisteme liniare de trei ecuații cu trei necunoscute,regula lui Cramer

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23})\neq 0$

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-(b_3a_{22}a_{13}+b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{12}a_{33})$

$d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-(a_{31}b_2a_{13}+a_{21}b_1a_{33}+a_{11}b_3a_{23})$

$d_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{12}a_{31}b_2-(a_{31}a_{22}b_1+a_{11}a_{32}b_2+a_{21}a_{12}b_3)$

$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \\ z=\frac{d_z}{d} \end{cases}$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}, A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}, A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$, $X\cdot A=B\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Subiectul II1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că detM=45.

b)Demonstrați că $A(-a)+A(a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

c)Determinați numerele reale a și b pentru care $A(a)\cdot A(b)=M$.

2.Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} a+2 & a+1 \\ a-1 & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că detM=9.

b)Demonstrați că $A(-a)+A(a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

c)Determinați numerele reale a și b pentru care $A(a)\cdot A(b)=M$.

3.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că detA=−2.

b)Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(2)\cdot X\cdot M(1)=A$.

4.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că detA=−2.

b)Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(2)\cdot X\cdot M(1)=A$.

5.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

a)Arătați că detA=0.

b)Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b-ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați numărul real a pentru care $M(1)+M(2)+\cdots+M(2020)=2020M(a)$.

6.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

a)Arătați că detA=0.

b)Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Determinați numărul real a pentru care $M(1)+M(2)+\cdots+M(2021)=2021M(a)$.

7.Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că detM=8.

b)Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(a)=4A(a)+I_2$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\det(aA(a)+M)=0$.

8.Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că detM=8.

b)Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(a)=4A(a)+I_2$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\det(aA(a)+M)=0$.

9.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$,unde x și y sunt numere reale.

a)Arătați că $\det(A(2,1))=5$.

b)Determinați numărul natural n pentru care $A(n-2,0)+A(n+2,0)=A(2020,0)$.

c)Determinați numărul real a , știind că există un număr real x pentru care

$A(x,2) \cdot A(x,2) = A(a,8)$.

10.Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$,unde x și y sunt numere reale.

a)Arătați că $\det\left(A(1,-1)\right) = 2$.

b)Determinați numărul natural n pentru care $A(n+3,0) + A(n-3,0) = A(2022,0)$.

c)Determinați numărul real a , știind că există un număr real x pentru care $A(x,2) \cdot A(x,2) = A(a,-8)$.

11.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 3$.

b)Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy + 3x + 3y + 3)$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real a, știind că $A(a) = A(x) \cdot A\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot A(y)$, pentru orice numere reale x și y.

12.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+3 & x+2 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 5$.

b)Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy + 5x + 5y + 10)$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real a, știind că $A(a) = A(x) \cdot A\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot A(y)$, pentru orice numere reale x și y.

13.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 4 & a-2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det A=36$.

b)Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.

c)Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x) \cdot M(y) = A$.

14.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix} a-1 & 4 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătați că $\det A=36$.

b)Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.

c)Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x) \cdot M(y) = A$.

15.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=5$.

b)Arătați că, dacă $A+B(x) = 3I_2$, atunci $A \cdot B(x) = 5I_2$.

c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(x) \cdot B(x) - I_2) = 0$.

16.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=5$.

b)Arătați că, dacă $A+B(x) = 3I_2$, atunci $A \cdot B(x) = 5I_2$.

c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B(x) \cdot B(x) - I_2) = 0$.

17.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=16$.

b)Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B=aI_2$.

c)Demonstrați că $\det\left(xA + \frac{1}{x}B\right) \geq 49$, pentru orice număr real nenul x.

18.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=16$.

b)Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B=aI_2$.

c)Demonstrați că $\det\left(xA + \frac{1}{x}B\right) \geq 49$, pentru orice număr real nenul x.

19.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

b)Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x) \cdot A(y) = 3I_2$.

c)Determinați numărul întreg p pentru care $\det(A(p) \cdot A(p) + I_2) = 5$.

20.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

b)Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x) \cdot A(y) = 3I_2$.

c)Determinați numărul întreg p pentru care $\det(A(p) \cdot A(p) + I_2) = 5$.

21.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m+1 & m \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 1$.

b)Demonstrați că $A(m) + A(-m) = 2A(0)$, pentru orice număr real m.

c)Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(5)$.

22.Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ m & 1 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.

a)Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 1$.

b)Demonstrați că $A(m) + A(-m) = 2A(0)$, pentru orice număr real m.

c)Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(5)$.

23.Se consideră matricele $A= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $5A-3B=8\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

b)Demonstrați că matricea B este inversa matricei A.

c)Determinați numerele reale x și y, știind că $8A-xA \cdot A=xI_2$.

24.Se consideră matricele $A= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $5A-3B=8\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b)Demonstrați că matricea B este inversa matricei A.

c)Determinați numerele reale x și y, știind că$8A- xA \cdot A=xI_2$.

25.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=-21$.

b)Arătați că $A \cdot B-B \cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B \cdot B - xI_2) = 0$,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=-43$.

b)Arătați că $A \cdot B-B \cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B \cdot B + xI_2) = 0$,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=-8$.
b)Arătați că $A\cdot A-2A=8I_2$,unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
c)Demonstrați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real x.
28.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x&4\\4&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=-3$.
b)Arătați că $A\cdot A-2A=3I_2$,unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
c)Demonstrați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real x.
29.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det A=5$.
b)Determinați numărul real a pentru care $B\cdot B=2B$.
c)Arătați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real a.
30.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4&3\\3&4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det A=7$.
b)Determinați numărul real a pentru care $B\cdot B=4B$.
c)Arătați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real a.
31.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1&-3\\3&0\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=3$.
b)Arătați că $(A+B)(B-A)=\begin{pmatrix}0&0\\3&-27\end{pmatrix}$.
c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A\cdot X=B$.
32.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-2&-3\\3&0\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=6$.
b)Arătați că $(A-B)(B+A)=\begin{pmatrix}27&27\\9&9\end{pmatrix}$.
c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A\cdot X=B$.
33.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}8&2\\4&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&4\\2&8\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det A$.
b)Arătați că $9(A+B)-(A\cdot B+B\cdot A)=45I_2$.
c)Determinați numerele reale x, pentru care $\det(A+xI_2)=0$.
34.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\6&9\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}9&6\\3&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det A$.
b)Arătați că $10(A+B)-(A\cdot B+B\cdot A)=37I_2$.
c)Determinați numerele reale x, pentru care $\det(A-xI_2)=0$.
35.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x&3\\x&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det\big(A(4)\big)=4$.
b)Arătați că $A(2017+x)+A(2017-x)=2A(2017)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale m pentru care $\det\big(A(3)+mA(1)\big)=0$.
36.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x&x\\4&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det\big(A(5)\big)=5$.
b)Arătați că $A(2019+x)+A(2019-x)=2A(2019)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale m pentru care $\det\big(A(4)+mA(1)\big)=0$.
37.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=-2$.
b)Arătați că $A\cdot A-2A=2I_2$.
c)Determinați numărul real x,pentru care $A\cdot B=2I_2$, unde $B=\begin{pmatrix}-1&x\\x-2&-1\end{pmatrix}$.
38.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=-3$.
b)Arătați că $A\cdot A-2A=3I_2$.
c)Determinați numărul real x,pentru care $A\cdot B=3I_2$, unde $B=\begin{pmatrix}-1&x-3\\x&-1\end{pmatrix}$.
39.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=1$.
b)Arătați că $A\cdot A+I_2=2A$.
c)Determinați numerele reale a,b și c, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}a-1&b\\c+2&1\end{pmatrix}=I_2$.
40.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=1$.
b)Arătați că $A\cdot A+I_2=2A$.
c)Determinați numerele reale a,b și c, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}a-3&b+1\\c&1\end{pmatrix}=I_2$.
41.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x&2\\2&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=-7$.
b)Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot A-4(A+B)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
42.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&5\\5&2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x&5\\5&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=-21$.
b)Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot A-2(A+B)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
43.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\-2&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&-2\\2&2\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=4$.
b)Arătați că $B\cdot B+2A=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.
c)Determinați numerele reale x și y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix}2^x&0\\0&4^y\end{pmatrix}$.
44.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=1$.

b)Arătați că $B\cdot B+A=O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale x și y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix} 3^x & 0 \\ 0 & 9^y \end{pmatrix}$.

45.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

a)Arătați că $\det A=6$.
b)Arătați că $\det(3B - A) = 0$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale x și y, pentru care $A\cdot B=B\cdot A$.

46.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

a)Arătați că $\det A=8$.
b)Arătați că $\det(4B - A) = 0$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale x și y, pentru care $A\cdot B=B\cdot A$.

47.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=0$.

b)Verificați dacă $A\cdot(A + 2I_2) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale m pentru care $\det B=0$, unde $B=A\cdot A+mI_2$.

48.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=0$.

b)Verificați dacă $A\cdot(A + 3I_2) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale m pentru care $\det B=0$, unde $B=A\cdot A-mI_2$.

49.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Arătați că $(A - I_3)(A - I_3)(A - I_3) = O_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

50.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Arătați că $(A - I_3)(A - I_3)(A - I_3) = O_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

51.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $C(x)=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=-5$.

b)Arătați că $\det\big(A + C(-1)\big) = \det B$.
c)Determinați numărul real x pentru care $C(x) \cdot A - A \cdot C(x) = -B$.

52.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ și $C(x)=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=-11$.
b)Arătați că $\det\big(A + C(-1)\big) = \det B$.
c)Determinați numărul real x pentru care $C(x) \cdot A - A \cdot C(x) = B$.

53.Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det M=8$.

b)Arătați că $M\cdot M+5M+8I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM+bI_2$.

54.Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det M=6$.

b)Arătați că $M\cdot M+4M+6I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM-bI_2$.

55.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=0$.
b)Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

c)Arătați că $\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = 2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

56.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=0$.
b)Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

c)Arătați că $\det(A + I_2) + \det(A - I_2) = 2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

57.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=-2$.
b)Arătați că $A+B=5C$.

c)Demonstrați că $AB+BA+4I_2 = 25C$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

58.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=-2$.
b)Arătați că $A+B=5C$.

c)Demonstrați că $AB+BA+4I_2 = 25C$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

59.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=1$.

b)Arătați că $A\cdot A+I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Demonstrați că $\det(A - aI_2) \geq 1$, pentru orice număr real a.

60.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=1$.

b)Arătați că $A\cdot A+I_2 = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)Demonstrați că $\det(A - aI_2) \geq 1$, pentru orice număr real a.

61.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Determinați numerele reale p pentru care $A\cdot A=pA$.

c)Determinați matricele $B=\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, știind că $\det(A + B) = 0$, unde b este un număr real.

62.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Determinați numerele reale p pentru care $A\cdot A=pA$.

c)Determinați matricele $B=\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, știind că $\det(A - B) = 0$, unde b este un număr real.

63.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Determinați numărul real x, știind că $A\cdot A=xA$.

c)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A + aI_2) = 0$.

64.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Determinați numărul real x, știind că $A\cdot A=xA$.

c)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A - aI_2) = 0$.

65.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

a)Arătați că $\det B=-1$.

b)Arătați că $\det A\neq 0$ pentru orice număr întreg a.

c)Determinați numărul întreg a știind că inversa matricei A are toate elementele numere întregi.

66.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

a)Arătați că $\det B=-5$.

b)Arătați că $\det A\neq 0$ pentru orice număr întreg a.

c)Determinați numărul întreg a știind că inversa matricei A are toate elementele numere întregi.

67.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a)Arătați că $\det A=-4$.

b)Determinați numărul real b pentru care $A+B=AB+C$.

c)Arătați că $\det(B + 4C) = \det B - \det A$ pentru orice număr real b.

68.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a)Arătați că $\det A=-5$.

b)Determinați numărul real b pentru care $A+B=AB+C$.

c)Arătați că $\det(B + 5C) = \det B - \det A$ pentru orice număr real b.

69.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=0$.

b)Arătați că $A\cdot A=10A$.

c)Determinați numerele reale x și y pentru care $A+\begin{pmatrix} -8 & y \\ y & x \end{pmatrix} = I_2$.

70.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=0$.

b)Arătați că $A\cdot A=26A$.

c)Determinați numerele reale x și y pentru care $A+\begin{pmatrix} x & y \\ y & -24 \end{pmatrix} = I_2$.

71.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 4 & x \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=0$.

b)Determinați numărul real x știind că $B+C=A$.

c)Arătați că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

72.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătați că $\det A=0$.

b)Determinați numărul real x știind că $B+C=A$.

c)Arătați că $B\cdot B+2B=O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

73.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=-1$.

b)Arătați că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

c)Determinați numărul real x știind că $A\cdot A-xA=I_2$.

74.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Arătați că $\det A=-1$.

b)Arătați că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

c)Determinați numărul real x știind că $A\cdot A+xA=I_2$.

75.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Arătați că $B\cdot A-A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A + xB) = 0$.

76.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Arătați că $A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A - xB) = 0$.

77.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det A$.

b)Determinați numărul real m pentru care matricele $A+mI_3$ și $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 8 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ sunt egale,

unde $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

78.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 9 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

a)Calculați detA.

b)Determinați numărul real m pentru care matricele $A+mI_3$ și $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 8 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ sunt egale,

unde $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

79.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3 & m\\ m & m+1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.
a)Calculați detA.
b)Pentru $m=-4$, arătați că $A+B=O_2$.
c)Determinați numărul real m pentru care $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 18 & 17\end{pmatrix}$.

80.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m+2\end{pmatrix}$, unde m este număr real.
a)Calculați detA.
b)Pentru $m=-3$, arătați că $A+B=O_2$.
c)Determinați numărul real m pentru care $A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 12\\ 6 & 14\end{pmatrix}$.

81.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.
a)Calculați detA.
b)Determinați numărul real b pentru care $A\cdot B=3I_2$.
c)Determinați numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

82.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}b & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.
a)Calculați detA.
b)Determinați numărul real b pentru care $A\cdot B=4I_2$.
c)Determinați numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

83.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculați detA.
b)Pentru $x=0$ arătați că $A-B=2I_2$.
c)Determinați numărul real x pentru care $\det(A+B)=0$.

84.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & 0\\ -2 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculați detA.
b)Pentru $x=1$ arătați că $A-B=I_2$.
c)Determinați numărul real x pentru care $\det(A+B)=0$.

85.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}0 & 2a\\ 2a & 0\end{pmatrix}$.

a)Arătați că $M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=M(0)$.
b)Determinați numărul real a pentru care $\det M(a)=0$.
c)Determinați matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.

86.Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}4a & 0\\ 0 & 4a\end{pmatrix}$.

a)Arătați că $M\left(\frac{1}{4}\right)+M\left(-\frac{1}{4}\right)=M(0)$.
b)Determinați numărul real a pentru care $\det M(a)=0$.
c)Determinați matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.

87.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

a)Calculați detA.

b)Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A-xI_2=A$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Determinați matricele $M=\begin{pmatrix}m+1 & m\\ m & 1\end{pmatrix}$, știind că $\det(M+A)=0$, unde m este număr real.

88.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

a)Calculați detA.

b)Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A-xI_2=A$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c)Determinați matricele $M=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m+4\end{pmatrix}$, știind că $\det(M+A)=0$, unde m este număr real.

89.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 3 & x\\ 3 & -1 & x\\ x & x & 3\end{pmatrix}$ și se notează

determinantul ei cu $\Delta(x)$.
a)Calculați $\Delta(2)$.
b)Arătați că $\Delta(x)=8(x^2-3)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați inversa matricei $A(0)$.

90.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3 & x & x\\ x & -1 & 3\\ x & 3 & -1\end{pmatrix}$ și se notează

determinantul ei cu $\Delta(x)$.
a)Calculați $\Delta(3)$.
b)Arătați că $\Delta(x)=8(x^2-3)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați inversa matricei $A(2)$.

91.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 24 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 0\\ -4x & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=4$.
b)Determinați numărul real x pentru care $B(x)\cdot B(-x)+B(x)=A$.
c)Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $B(1)\cdot X=A$.

92.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 30\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & -5x\\ 0 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=4$.
b)Determinați numărul real x pentru care $B(x)\cdot B(-x)+B(x)=A$.
c)Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $B(1)\cdot X=A$.
93.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -1 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=3$.
b)Arătați că $B\cdot A+B=O_2$.
c)Determinați numerele naturale n pentru care $\det(B+nA)=\det B+n\det A$.
94.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=1$.
b)Arătați că $B\cdot A+B=O_2$.
c)Determinați numerele naturale n pentru care $\det(B+nA)=\det B+n\det A$.
95.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=3$.
b)Arătați că $4A-A\cdot A=3I_2$.
c)Determinați numărul real x pentru care $(xA-I_2)(xA-I_2)=6A-2I_2$.
96.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=4$.
b)Arătați că $5A-A\cdot A=4I_2$.
c)Determinați numărul real x pentru care $(xA-I_2)(xA-I_2)=7A-3I_2$.
97.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a-2 & 1\\ 1 & a+2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0))=-5$.
b)Arătați că $A(a)\cdot A(-a)=(5-a^2)I_2$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=A(3)$.
98.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+2 & 1\\ 1 & a-2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0))=-5$.
b)Arătați că $A(a)\cdot A(-a)=(5-a^2)I_2$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=A(3)$.

Legi de compoziție,grupuri

Fie M o mulțime nevidă.O funcție $\varphi:M\times M\to M$, $(x,y)\to\varphi(x,y)$,se numește lege de compoziție pe M.
Notăm $\varphi=\circ,*,\oplus,+,\cdot,\odot,\Delta,\perp,\top,\cup,\cap$, etc
Notăm $\varphi(x,y)=x\circ y, x*y, x\oplus y, x+y, x\cdot y, x\odot y, x\Delta y, x\perp y, x\top y, x\cup y, x\cap y$, etc
Fie M o mulțime nevidă și $*:M\times M\to M,(x,y)\to x*y$
$*$ este asociativă $\Leftrightarrow (x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in M$
$*$ este comutativă $\Leftrightarrow x*y=y*x,\forall x,y,\in M$
$*$ admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in M$
$x\in M$ este simetrizabil în raport cu $*\Leftrightarrow\exists x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$
$(x')'=x$, $(ab)'=ba$, $(abc)'=cba$
Cuplul $(M,*)$ se numește grup dacă au loc axiomele :
$G_1)$ $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in M$,axioma asociativității
$G_2)$ $\exists e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in M$,axioma elementului neutru
$G_3)$ $\forall x\in M,\exists x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$,axioma elementelor simetrizabile
Grupul $(M,*)$ se numește grup abelian dacă are loc și axioma
$G_4)$ $x*y=y*x,\forall x,y,\in M$,axioma comutativității

Inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

Fie $a\in\mathbb{Z}$ și $n\in\mathbb{N},n\geq1$,din teoreama împărțirii cu rest obținem $a=nq+r,0\leq r<n$,unde $q,r\in\mathbb{Z}$ sunt unice
Notăm $r=a\bmod n$
$\widehat{a\oplus b}=(a+b)\bmod n$, $\widehat{a\odot b}=(a+b)\bmod n\ \forall a,b\in\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{n-1}\}$
$\hat{a}+\hat{b}=\widehat{a\oplus b}$, $\hat{a}\cdot\hat{b}=\widehat{a\odot b}\ \forall\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_n$
$-\hat{a}=\widehat{n-a}$
$\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow(a,n)=1$, $U(\mathbb{Z}_n)=\{a|(a,n)=1\}$
Dacă p e număr prim $\Rightarrow U(\mathbb{Z}_p)=\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\dots,\widehat{p-1}\}=\mathbb{Z}_n\setminus\{\hat{0}\}$

Polinoame,rădăcini ale polinoamelor

Fie $K\in\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\}$ cu p prim, $a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\in K$.
$f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_2X^2+a_1X+a_0$ este polinom cu coeficienți în K, $f\in K[X]$.
$a_n,a_{n-1},\dots,a_1,a_0\in K$ se numesc coeficienții polinomului f.
Dacă $a_n\neq0$ atunci $\operatorname{grad}f=n$.
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$,$f:K\to K$ se numește funcție polinomială.
Pentru $\alpha\in K$, $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\dots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0$ se numește valoarea polinomului f în punctul α.
α este rădăcină a lui f $\Leftrightarrow f(\alpha)=0\Leftrightarrow a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\dots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0$.

Teorema împărțirii cu rest

Pentru polinoamele $f,g\in K[X],g\neq0$,există și sunt unice polinoamele $c,r\in K[X]$ astfel încât $f=g\cdot c+r$ și $\operatorname{grad}r<\operatorname{grad}g$.
În acest caz avem c=câtul,r=restul.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$ și $\alpha\in\mathbb{Z}$.Dacă α este rădăcină a lui f atunci $\alpha|a_0$.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$,$a_n\neq0$și $\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\beta\neq0,(\alpha,\beta)=1$.Dacă $\frac{\alpha}{\beta}$ este rădăcină a lui f atunci $\alpha|a_0$ și $\beta|a_n$.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{Q}[X]$ și $a,b,d\in\mathbb{Q}$ $d>0,\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$. Atunci: $a+b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ $a-b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f,și cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate.
Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X]$ și $a,b\in\mathbb{R},b\neq0$. Atunci:

a+bieste rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ a−bi este rădăcină a lui f, și cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate.

Divizibilitatea polinoamelor,teorema restului,teorema lui Bezout

Fie f,g$\in$K[X] două polinoame,K$\in\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\}$ cu p prim.

f⋮g$\Leftrightarrow\exists$h$\in$K[X] astfel încât f=gh$\Leftrightarrow$restul împărțirii lui f la g este polinomul nul$(g\neq 0)$

f⋮g$\Leftrightarrow$toate rădăcinile lui g sunt și rădăcini ale lui f ,cu cel puțin acelați ordin de multiplicitate ca la g

Teorema restului

Restul împărțirii lui f la X−α este egal cu $r=f(\alpha)$

Restul împărțirii lui f la X+α este egal cu $r=f(-\alpha)$

Teorema lui Bezout

f⋮X−α$\Leftrightarrow f(\alpha)=0$, f⋮X+α$\Leftrightarrow f(-\alpha)=0$

Relațiile lui Viete

Pentru ecuația $ax^2+bx+c=0$,cu soluțiile x_1,x_2 ,sau polinomul f=aX^2+bX+c,cu rădăcinile x_1,x_2,avem

$$\begin{cases} s_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ s_2=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=s_1^2-2s_2$

f=$aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

polinomul g=$X^2-s_1X+s_2$ are rădăcinile x_1,x_2

ecuația $x^2-s_1x+s_2=0$ are soluțiile x_1,x_2

Pentru ecuația $ax^3+bx^2+cx+d=0$,cu soluțiile x_1,x_2,x_3 ,sau polinomul f=aX^3+bX^2+cX+d,cu rădăcinile x_1,x_2,x_3, avem

$$\begin{cases} s_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ s_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a} \\ s_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=s_1^2-2s_2$

f=$aX^3+bX^2+cX+d=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$,

$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

polinomul g=$X^3-s_1X^2+s_2X-s_3$ are rădăcinile x_1,x_2,x_3

ecuația $x^3-s_1x^2+s_2x-s_3=0$ are soluțiile x_1,x_2,x_3

Pentru ecuația $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$,cu soluțiile x_1,x_2,x_3,x_4 ,sau polinomul f=$aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$,cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4, avem

$$\begin{cases} s_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a} \\ s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a} \\ s_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a} \\ s_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a} \end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=$

$=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=s_1^2-2s_2$

f=$aX^4+bX^3+cX^2+dX+e=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$,

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

polinomul g=$X^4-s_1X^3+s_2x^2-s_3X+s_4$ are rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4

ecuația $x^4-s_1x^3+s_2x^2-s_3x+s_4=0$ are soluțiile x_1,x_2,x_3,x_4.

Subiectul II2 (prelucrări bacalaureat)

1.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=-2(x+y)-\frac{xy}{3}$.

a)Arătați că $3\circ(-3)=3$.

b)Determinați numărul natural nenul n pentru care $n\circ\frac{1}{n}=-\frac{21}{2}$.

c)Determinați numărul real y astfel încât $x\circ y=12$, pentru orice număr real x.

2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(x+y)-\frac{xy}{3}$.

a)Arătați că $3\circ(-3)=3$.

b)Determinați numărul natural nenul n pentru care $n\circ\frac{1}{n}=\frac{19}{3}$.

c)Determinați numărul real y astfel încât $x\circ y=12$, pentru orice număr real x.

3.Se consideră polinomul f=$2X^3+4X^2+4X-5$.

a)Arătați că $f(0)=-5$.

b)Demonstrați că numărul a=$\frac{5}{x_1}+\frac{5}{x_2}+\frac{5}{x_3}$ este natural,unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

4.Se consideră polinomul f=$2X^3-4X^2+4X-5$.

a)Arătați că $f(0)=-5$.

b)Demonstrați că numărul a=$\frac{5}{x_1}+\frac{5}{x_2}+\frac{5}{x_3}$ este natural,unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

5.Se consideră polinomul f=$-mX^3+3X^2+mX-3$, unde m este număr real nenul.

a)Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

b)Pentru m=−4, determinați rădăcinile polinomului f.

c)Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-6$, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

6.Se consideră polinomul f=mX^3+3X^2-mX-3, unde m este număr real nenul.

a)Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

b)Pentru m=4, determinați rădăcinile polinomului f.

c)Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-6$, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

7.Se consideră polinomul f=X^3-4X^2-mX+3 , unde m este număr real.

a)Arătați că $f(2)=-3m-6$, pentru orice număr real m.

b)Demonstrați că , pentru orice număr real m, numărul E=$x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ este întreg, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Pentru m=−2, determinați rădăcinile polinomului f.

8.Se consideră polinomul f=X^3-4X^2+mX+3 , unde m este număr real.

a)Arătați că $f(2)=3m-6$, pentru orice număr real m.

b)Demonstrați că , pentru orice număr real m, numărul E=$x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ este întreg, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c)Pentru m=2, determinați rădăcinile polinomului f.

9.Se consideră polinomul $f=X^3-13X^2-mX-27$, unde m este număr real.
a)Arătați că $f(-1)+f(1)=-80$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-4X+1 , știind că f se divide cu $X+3$.
c)Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.
10.Se consideră polinomul $f=X^3-13X^2+mX-27$, unde m este număr real.
a)Arătați că $f(-1)+f(1)=-80$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+4X+1 , știind că f se divide cu $X-3$.
c)Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.
11.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-\frac{xy}{3}$.
a)Arătați că $6*2=4$.
b)Determinați numerele reale x, pentru care $x*(3x)=1$.
c)Calculați $1*2*3*\ldots*2020$.
12.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-\frac{xy}{6}$.
a)Arătați că $3*4=5$.
b)Determinați numerele reale x, pentru care $x*(6x)=6$.
c)Calculați $1*2*3*\ldots*2022$.
13.Se consideră polinomul $f=X^3+mX-8$.
a)Arătați că $f(1)=m-7$, pentru orice număr real m.
b)Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru $m=-9$, determinați numerele reale p și q, pentru care $f=(X+1)(X^2+pX+q)$.
14.Se consideră polinomul $f=X^3+mX-4$.
a)Arătați că $f(1)=m-3$, pentru orice număr real m.
b)Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Pentru $m=-5$, determinați numerele reale p și q, pentru care $f=(X+1)(X^2+pX+q)$.
15.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-7(x+y)+56$.
a)Arătați că $8\circ 6=6$.
b)Demonstrați că $x\circ y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n\leq 8$.
16.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-9(x+y)+90$.
a)Arătați că $7\circ 5=5$.
b)Demonstrați că $x\circ y=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n\leq 7$.
17.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=5xy+20(x+y)+120$.
a)Arătați că $(-4)\circ(-4)=0$.
b)Demonstrați că $x\circ y=5(x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numărul real x, pentru care $(x-5)\circ(x-5)\circ(x-5)=195$.
18.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=5xy+10(x+y)+18$.
a)Arătați că $(-2)\circ(-2)=3$.
b)Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real x, pentru care $(x-2)\circ(x-2)\circ(x-2)=198$.
19.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-3(x+y)+12$.
a)Arătați că $4*4=4$.
b)Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*\ldots*2020$.
20.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4(x+y)+20$.
a)Arătați că $5*5=5$.
b)Demonstrați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*\ldots*2021$.
21.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+5x+5y+4$.
a)Arătați că $x\circ y=5(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $x\circ\left(-\frac{4}{5}\right)=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ(n-1)<29$.
22.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=6xy+6x+6y+5$.
a)Arătați că $x\circ y=6(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $x\circ\left(-\frac{5}{6}\right)=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ(n-1)<35$.
23.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4(x+y)+20$.
a)Demonstrați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numărul real x, pentru care $x*5=2020$.
c)Calculați $\log_2 2*\log_2 3*\log_2 4*\ldots*\log_2 2020$.
24.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-5(x+y)+25$.
a)Demonstrați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numărul real x, pentru care $x*6=2021$.
c)Calculați $\log_2 2*\log_2 3*\log_2 4*\ldots*\log_2 2021$.
25.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-X-2$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-3$.
c)Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
26.Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2-X-5$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-2$.
c)Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=27$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
27.Se consideră polinomul $f=2X^3+X^2-8X-4$.
a)Arătați că $f(1)=-9$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+2$.
c)Determinați rădăcinile polinomului f.
28.Se consideră polinomul $f=3X^3-4X^2-13X-6$.
a)Arătați că $f(1)=-20$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.
c)Determinați rădăcinile polinomului f.
29.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-2x-2y+6$.
a)Arătați că $1\circ 2=2$.
b)Demonstrați că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real x, pentru care $(x \circ x) \circ x = 2$.

30.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a)Arătați că $1 \circ (-4) = -4$.

b)Demonstrați că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numărul real x, pentru care $(x \circ x) \circ x = -4$.

31.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 2$.

a)Arătați că $0 * 2 = 0$.

b)Determinați numerele reale x pentru care $(x^2) * x = 0$.

c)Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n * n * n * n < 6$.

32.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 5$.

a)Arătați că $1 * 4 = 0$.

b)Determinați numerele reale x pentru care $(x^2) * x = 1$.

c)Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n * n * n * n < 9$.

33.Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 7X + 8$.

a)Arătați că $f(2) = -6$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

c)Demonstrați că $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 + (x_3+1)^2 = 25$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

34.Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 - 8X + 12$.

a)Arătați că $f(2) = -16$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

c)Demonstrați că $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 + (x_3+1)^2 = 54$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

35.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 8x + 8y + 28$.

a)Arătați că $x * y = 2(x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y.

b)Arătați că $6 * 97 = 2016$.

c)Determinați numerele reale x, pentru care $x * (x-2) = 2$.

36.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.

a)Arătați că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.

b)Arătați că $0 * 335 = 2020$.

c)Determinați numerele reale x, pentru care $x * (x+2) = 7$.

37.Se consideră polinomul $f = X^3 + 6X^2 - 5$.

a)Arătați că $f(1) = 2$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c)Demonstrați că $\frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_3+x_1}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3} = -3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

38.Se consideră polinomul $f = X^3 + 7X^2 - 6$.

a)Arătați că $f(1) = 2$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c)Demonstrați că $\frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_3+x_1}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3} = -3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

39.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

a)Arătați că $1 \circ 3 = 3$.

b)Demonstrați că $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați valorile reale ale lui x,pentru care $x \circ x \le x$.

40.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a)Arătați că $1 \circ (-2) = -2$.

b)Demonstrați că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați valorile reale ale lui x,pentru care $x \circ x \ge x$.

41.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{4}xy + x + y$.

a)Arătați că $1 * (-4) = -4$.

b)Demonstrați că $x * y = \frac{1}{4}(x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x * \frac{1}{x} = -4$.

42.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{6}xy + x + y$.

a)Arătați că $1 * (-6) = -6$.

b)Demonstrați că $x * y = \frac{1}{6}(x+6)(y+6) - 6$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x * \frac{1}{x} = -6$.

43.Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 - 4X + 1$.

a)Arătați că $f(1) = -6$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c)Demonstrați că $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) = -15$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

44.Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 - 5X + 1$.

a)Arătați că $f(1) = -8$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c)Demonstrați că $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) = -24$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

45.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

a)Arătați că $1 \circ 4 = 4$.

b)Demonstrați că $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x$.

46.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$.

a)Arătați că $1 \circ 6 = 6$.

b)Demonstrați că $x \circ y = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice numere reale x și y.

c)Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x$.

47.Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 - 4X - 4$.

a)Arătați că $f(-1) = 0$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 2X + 1$.

c)Demonstrați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -\frac{5}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

48.Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 6X + 6$.

a)Arătați că $f(-1) = 0$.

b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$.

c)Demonstrați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -\frac{5}{6}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

49.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + x + y$.

a)Arătați că $x * y = (x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

b)Calculați $0 * (-1) * (-2) * (-3)$.

c)Determinați numerele reale a, știind că $a * a * 2018 = 2018$.

50.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-3x-3y+12$.
a)Arătați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $0*1*2*3*4$.
c)Determinați numerele reale a, știind că $a*a*2020=2020$.
51.Se consideră polinomul $f=X^3+4X^2-10X+5$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X-5.
c)Demonstrați că $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-2$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
52.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-7X+4$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X-4.
c)Demonstrați că $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{-1}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
53.Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+7X-1$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Arătați că $f(a)+f(-a)+2\leq 0$, pentru orice număr real a.
c)Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=35x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
54.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+3X-1$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Arătați că $f(a)+f(-a)+2\leq 0$, pentru orice număr real a.
c)Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
55.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2-4X+1$.
a)Arătați că $f(1)=-6$.
b)Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul X+1.
c)Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
56.Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2-6X+1$.
a)Arătați că $f(1)=-12$.
b)Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul X+1.
c)Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
57.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+6x+6y+30$.
a)Arătați că $5\circ(-6)=-6$.
b)Arătați că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.
58.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+3x+3y+6$.
a)Arătați că $4\circ(-3)=-3$.
b)Arătați că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.
59.Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X+2$.
a)Arătați că $f(-2)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X+2.
c)Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=-1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
60.Se consideră polinomul $f=X^3+7X^2+X+7$.

a)Arătați că $f(-7)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+8X+7.
c)Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{47}{7}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
61.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție dată de $x\circ y=-xy+3x+3y-6$.
a)Calculați $3\circ 2019$.
b)Arătați că $x\circ y=-(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x\circ 9^x=3$.
62.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție dată de $x\circ y=-xy+4x+4y-12$.
a)Calculați $4\circ 2016$.
b)Arătați că $x\circ y=-(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x\circ 4^x=4$.
63.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+5x+5y+20$.
a)Arătați că $x*y=(x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $(-2020)*(-5)*0*5*2020$.
c)Determinați numerele naturale n, știind că numărul $n*(-n)$ este natural.
64.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-2x-2y+6$.
a)Arătați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y.
b)Calculați $(-2017)*(-2)*0*2*2017$.
c)Determinați numerele naturale n, știind că numărul $n*(-n)$ este natural.
65.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-6x-6y+42$.
a)Arătați că $1*6=6$.
b)Arătați că $x*y=(x-6)(y-6)+6$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.
66.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-7x-7y+56$.
a)Arătați că $1*7=7$.
b)Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.
67.Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+X+4$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin X−1.
c)Arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-\frac{3}{2}$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
68.Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+2X+3$.
a)Arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin X−1.
c)Arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
69.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x+3y+xy+6$.
a)Arătați că $(-3)\circ 3=-3$.
b)Arătați că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)\circ(x-4)=4$.
70.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=12+4x+4y+xy$.
a)Arătați că $(-4)\circ 4=-4$.
b)Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+1)\circ(x-5)=3$.
71.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+7x+7y+42$.

a)Arătați că $0\circ(-7) = -7$.
b)Arătați că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=18$.
72.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-4x-4y+20$.
a)Arătați că $0\circ 4 = 4$.
b)Arătați că $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=20$.
73.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=4(x+y-3)-xy$.
a)Arătați că $1*4=4$.
b)Arătați că $x*4=4*x=4$ pentru orice număr real x.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.
74.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=5(x+y-4)-xy$.
a)Arătați că $1*5=5$.
b)Arătați că $x*5=5*x=5$ pentru orice număr real x.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.
75.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=xy-5(x+y)+30$.
a)Arătați că $x\circ 5=5\circ x=5$, pentru orice număr real x.
b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.
c)Calculați $1\circ 2\circ\ldots\circ 2019$.
76.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=xy-6(x+y)+42$.
a)Arătați că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru orice număr real x.
b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.
c)Calculați $1\circ 2\circ\ldots\circ 2020$.
77.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție comutativă $x*y=x+y-3$.
a)Arătați că $1*(-1) = 2017*(-2017)$.
b)Verificații dacă legea „$*$" este asociativă.
c)Calculați $(-4)*(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3*4$.
78.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție comutativă $x*y=x+y-7$.
a)Arătați că $4*(-4) = 2020*(-2020)$.
b)Verificații dacă legea „$*$" este asociativă.
c)Calculați $(-4)*(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3*4$.
79.Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+4X$.
a)Arătați că $f(-1) = 0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2+4X$.
c)Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
80.Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+X$.
a)Arătați că $f(1) = 0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X$.
c)Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
81.Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+5X$.
a)Calculați $f(1)$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-5$.
c)Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

82.Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+6X$.
a)Calculați $f(1)$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-6$.
c)Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
83.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=x+y+5$.
a)Calculați $4\circ(-4)$.
b)Arătați că $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$".
c)Determinați numărul real x pentru care $2020\circ(-2020) = x\circ x$.
84.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=x+y-3$.
a)Calculați $2\circ(-2)$.
b)Arătați că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$".
c)Determinați numărul real x pentru care $2019\circ(-2019) = x\circ x$.
85.Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+3$.
a)Arătați că $f(1) = 0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-4X+3$.
c)Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3, sunt rădăcinile polinomului f.
86.Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+4$.
a)Arătați că $f(1) = 0$.
b)Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-5X+4$.
c)Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3, sunt rădăcinile polinomului f.
87.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x*y=x+y-4$.
a)Calculați $6*(-6)$.
b)Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.
c)Calculați $(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3$.
88.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x*y=x+y-5$.
a)Calculați $7*(-7)$.
b)Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.
c)Calculați $(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3$.
89.În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX+b$.
a)Calculați a+b, știind că $f(1) = 0$.
b)Pentru $a=-1$ și $b=3$,determinați rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numerele reale a și b, știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ sunt rădăcini ale polinomului f.
90.În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+aX+b$.
a)Calculați a+b, știind că $f(1) = 0$.
b)Pentru $a=-1$ și $b=4$,determinați rădăcinile polinomului f.
c)Determinați numerele reale a și b, știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 4$ sunt rădăcini ale polinomului f.
91.Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y = \frac{4x^2+4y^2}{xy}$.
a)Arătați că $3\circ\frac{1}{3} = \frac{328}{9}$.
b)Demostrați că $x\circ y\geq 1$, pentru orice $x,y\in M$.
c)Determinați $a\in M$, pentru care $a^2\circ\frac{1}{a^2} = 8$.
92.Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y = \frac{3x^2+3y^2}{xy}$.
a)Arătați că $3\circ\frac{1}{3} = \frac{82}{3}$.
b)Demostrați că $x\circ y\geq 6$, pentru orice $x,y\in M$.

c)Determinați a∈M, pentru care $a^2 \circ \frac{1}{a^2} = 6$.

93.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x - 3y + 2$.

a)Arătați că $1 \circ 1 = 0$.

b)Demonstrați că $x \circ \frac{2}{3} = x$, pentru orice număr real real x.

c)Arătați că legea de compoziție „∘" **nu** admite element neutru.

94.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + 2y - 1$.

a)Arătați că $(-1) \circ 1 = 0$.

b)Demonstrați că $x \circ \frac{1}{2} = x$, pentru orice număr real real x.

c)Arătați că legea de compoziție „∘" **nu** admite element neutru.

95.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - (x+2)(y+2) + y^2$.

a)Arătați că $3 \circ (-2) = 13$.

b)Demonstrați că legea de compoziție „∘" este comutativă.

c)Demonstrați că $x \circ 2 \geq -8$, pentru orice număr real x.

96.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 + (x+3)(y+3) + y^2$.

a)Arătați că $1 \circ (-3) = 10$.

b)Demonstrați că legea de compoziție „∘" este comutativă.

c)Demonstrați că $x \circ 1 \geq 9$, pentru orice număr real x.

97.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + xy - x - y + 3$.

a)Arătați că $2 * 3 = 8$.

b)Demonstrați că $(-x) * x = 3$, pentru orice număr real x.

c)Determinați numărul real x pentru care $3^x * 9 = 3$.

98.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + xy - x - y + 4$.

a)Arătați că $3 * 2 = 14$.

b)Demonstrați că $x * (-x) = 4$, pentru orice număr real x.

c)Determinați numărul real x pentru care $2^x * 8 = 4$.

Tabel de derivate

$c' = 0$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)' = 2x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{x^2+1}$
$(x^4)' = 4x^3$	$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^{-x})' = -e^{-x}$	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

Reguli de derivare

$(f+g)' = f' + g'$ $\quad (f-g)' = f' - g'$ $\quad (\alpha f)' = \alpha f'$ $\quad (fg)' = f'g + fg'$

$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Derivate

1.Calculați $f'(x)$ pentru următoarele funcții:

$f(x) = 2016, f(x) = 6\sqrt{2}, f(x) = \mathrm{tg}4, f(x) = x^4, f(x) = x^{100}, f(x) = x^{2015}, f(x) = x^9,$

$f(x) = x^{900}, f(x) = x^{2017}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1}{x^3}, f(x) = \frac{1}{x^8}, f(x) = \frac{1}{x^{2014}}, f(x) = \log_4 x,$

$f(x) = \log_5 x, f(x) = \log_{0,3} x, f(x) = 5^x, f(x) = 6^x, f(x) = 2014^x, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x,$

$f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, f(x) = \log_3(5x) + \log_3\frac{1}{5}, f(x) = \log_6(4x^2) - \log_6(4x),$

$f(x) = \log_2(3x^2) + \log_2\frac{1}{3x}, f(x) = 5^x, f(x) = 2016^x, f(x) = 5^{2x}, f(x) = e^{3x}, f(x) = x^3 + 3^x,$

$f(x) = x^3 + 4x + 1, f(x) = x^3 - 3x + 2, f(x) = x^3 + 2x^2 - 5, f(x) = 3x - x^5,$

$f(x) = 2 - 3x + x^2 - 5x^3, f(x) = 6x - x^4, f(x) = x + 3\sqrt{x}, f(x) = x^4 + \sin x + \cos x,$

$f(x) = \cos x - \sin x, f(x) = x - \cos x + \sin x, f(x) = x^2 + 5\sqrt{x}, f(x) = x - 3\sqrt{x},$

$f(x) = 5x^3 + \ln x, f(x) = 5^x + 2^x - x, f(x) = 3^x + 4^x - x^2, f(x) = 4\cos x + 3\sin x - x,$

$f(x) = 5\sin x - 6\cos x + \sqrt{2}, f(x) = x^4 + \log_4 x + 2^x, f(x) = x^3 + \log_3 x - \sin x,$

$f(x) = x^4 + \log_4 x + \cos x, f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{3} + \mathrm{tg}x, f(x) = \sqrt[3]{x} - 3^2 + \mathrm{ctg}x,$

$f(x) = (x-2)^2 + (x+2)^2, f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3} + \log_{0,6} x, f(x) = \log_4 x^4 + \log_3 x^6,$

$f(x) = 3\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x, f(x) = 4\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x, f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}x, f(x) = 3^{x+1} + 2^{x-1},$

$f(x) = 5\mathrm{ctg}x - 2\mathrm{tg}x + 3^x, f(x) = 1^x + 2^x + e^x + 3^x, f(x) = \log_5 x^5 - \log_{\frac{1}{2}} x^3,$

$f(x) = 5^{x+1} + 3^{x-1}, f(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}, f(x) = 3^x + x^3 + \sqrt[3]{x} + \log_3 x,$

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 10, f(x) = (1-3x)(1+6x), f(x) = \sin 2x, f(x) = (1+x)\ln x,$

$f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\ln x, f(x) = (2\sin x + 3)(1 - 5\cos x), f(x) = (1 - 3x^2)(1 - 2\sin x),$

$f(x) = \left(-\frac{3}{x} + 4\right)(2\ln x - 3), f(x) = (1+x)(2+\ln x)(3\sin x - 5), f(x) = 3x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x,$

$f(x) = x\cos x - 5x\ln x + 3\sin x - x^2 + 2x, f(x) = (3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\sin x + 5\sin x\ln x - x^3 + 4x + 5,$

$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 6, f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, f(x) = x\ln x, f(x) = x\sin x,$

$f(x) = x\cos x, f(x) = x^2\sin x, f(x) = \sqrt{x}\sin x + 5\cos x - \frac{3}{x} + 9, f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sin x, f(x) = \frac{1}{x+2},$

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(1 + 2x + 3x^2), f(x) = \frac{x+1}{x-1}, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = \frac{x}{x^2+1},$

$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3+1}, f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+x+1}, f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}, f(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x},$

$f(x) = \frac{\ln x + x^2}{\ln x - x^2}, f(x) = \frac{3\sin x}{3\cos x - 5}, f(x) = \frac{-\sin x + 3\cos x}{\sin x + 4}, f(x) = \frac{2\sin x - 5\cos x}{3\sin x + 4}, f(x) = \frac{5x+3}{3-5x}, f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4},$

$f(x) = (5x+6)\ln x, f(x) = (5x-6)e^x, f(x) = xe^x\ln x, f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \ln x,$

$f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \cos x, f(x) = \frac{\cos x + 3}{\cos x - 3}, f(x) = \frac{x+e^x}{x-e^x}, f(x) = 2x^3 + 4x + 6, f(x) = \frac{1}{x} - x,$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5, f(x) = x - \frac{1}{x}, f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, f(x) = 2x^3 - 6x + 1,$

$f(x) = x^3 - 3x + 1, f(x) = \frac{x-2}{x+2}, f(x) = x + \frac{4}{x-2}, f(x) = \frac{3x}{x^2+1}, f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x-1}{x-2},$

$f(x) = (x-1)e^x, f(x) = x^2 - \ln x, f(x) = x^2 - x, f(x) = x^3 - 3x + 7, f(x) = e^x - x,$

$f(x) = \sqrt{x} - 1, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = xe^x, f(x) = (x+2)^3, f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}, f(x) = x\ln x,$

$f(x) = 2x^3 - 4x + 6, f(x) = \frac{1}{x} + x, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, f(x) = x + \frac{1}{x}, f(x) = x^4 + 2x^2 + 1,$

$f(x) = 2x^3 + 6x + 1, f(x) = x^3 + 3x + 1, f(x) = \frac{x+2}{x-2}, f(x) = x - \frac{4}{x-2}, f(x) = \frac{3x}{x^2-1},$

$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = x^2 + \ln x, f(x) = x^2 + x,$

$f(x) = x^3 + 3x + 7, f(x) = e^x + x, f(x) = \sqrt{x} + 1, f(x) = \frac{x-1}{x}, f(x) = 2xe^x, f(x) = (x+3)^3,$

$f(x) = x - 10 + \frac{11}{x}, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x^3 + x^2 - x + 1, f(x) = x^3 - 3x,$

$f(x) = -x^3 + 3x + 2, f(x) = x^3 - 12x, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = x^3 - x^2 + x + 1,$

$f(x) = x^3 + 3x, f(x) = -x^3 - 3x + 2, f(x) = -x^3 + 12x, f(x) = \frac{x-1}{x}, f(x) = -\frac{1}{x},$

$f(x) = e^x - x - 1, f(x) = 3e^x + x^2, f(x) = e^x - \ln x + x, f(x) = x^4 - 8x^2 + 16,$

$f(x) = (x+1)e^x, f(x) = xe^x - e^x + 1, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = \frac{x+\ln x}{x}, f(x) = x\ln x - x + 1,$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}, f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}, f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, f(x) = \ln(x+1) - \ln x,$

$f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9), f(x) = \frac{2}{x} + \ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = x - \ln x, f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1},$

$f(x) = x + \ln x, f(x) = \sqrt{x} - \ln x, f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+2}, f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}, f(x) = -\frac{4}{x^2+1},$

$f(x) = e^x - \frac{1}{x}, f(x) = \ln x + e^x, f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x, f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}, f(x) = e^x - x,$

$f(x) = x^2e^x, f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}, f(x) = \sqrt{x^2+3}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}, f(x) = \sqrt{x^2+4},$

$f(x) = e^x + x - 1, f(x) = 3e^x - x^2, f(x) = e^x + \ln x - x, f(x) = x^4 + 8x^2 - 16,$

$f(x) = (x-1)e^x, f(x) = xe^x + e^x + 1, f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = \frac{x-\ln x}{x}, f(x) = x\ln x + x - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}, f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, f(x) = \ln(x+1) + \ln x,$

$f(x) = e^x(x^2 + 6x + 9), f(x) = \frac{2}{x} - \ln x, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x + 2\ln x, f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+1},$

$f(x) = x - \ln x, f(x) = \sqrt{x} + \ln x, f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2}, f(x) = \frac{x-1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}, f(x) = -\frac{4}{x^2-1},$

$f(x) = e^x + \frac{1}{x}, f(x) = \ln x - e^x, f(x) = x^3 - x^2 + x - 3^x, f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}, f(x) = e^x + x,$

$f(x) = x^3e^x, f(x) = x^2 - \frac{2}{x}, f(x) = \frac{e^x}{1-x}, f(x) = \sqrt{x^2-3}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = \sqrt{x^2-4},$

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 3, f(x) = 4x^3 - 7x + 2, f(x) = x^3 + 3x + 2, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1,$

$f(x) = \frac{x-3}{x+3}, f(x) = x + \frac{5}{x-3}, f(x) = \frac{6x}{x^2+1}, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, f(x) = \ln x - x + \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x-2}{x-3},$

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = (x-2)e^x, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = x^2 + \ln x, f(x) = x^2 - 3x,$

$f(x) = x^2 + x, f(x) = x^4 - x^3, f(x) = x^3 + 3x - 5, f(x) = e^x + x, f(x) = \sqrt{x} + 1, f(x) = \frac{x+2}{x},$

$f(x) = \frac{x-2}{x}, f(x) = xe^x, f(x) = (x+3)^2, f(x) = (x-2)^3, f(x) = x + 11 - \frac{6}{x}, f(x) = x^4\ln x,$

$f(x) = \sqrt{x} + 4\ln x, f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}, f(x) = \frac{x-2}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, f(x) = e^x + \frac{1}{x}, f(x) = e^x - \frac{1}{x} + x,$

$f(x) = \ln x + e^x, f(x) = x^3 - x^2 + x - 3^x, f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}, f(x) = e^x - 2x, f(x) = x^3e^x,$

$f(x) = x^2 + \frac{3}{x}, f(x) = \frac{e^x}{x+2}, f(x) = \sqrt{x^2+5}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,$

$f(x) = 2x + \frac{1}{x}, f(x) = x^4 - 6x^2 + 9, f(x) = 4x^3 - 7x + 2, f(x) = x^3 - 6x + 3, f(x) = x + \frac{5}{x-3},$

$f(x) = \frac{x-4}{x+4}, f(x) = \ln x - \frac{3}{x}, f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, f(x) = (x-2)e^x, f(x) = \frac{x+2}{x+1}, f(x) = e^x(x+2),$

$f(x) = x^4e^x, f(x) = x^{2016}e^x, f(x) = x^3 - \ln x, f(x) = x^2 - x + 3, f(x) = e^x - x^2 + 3x,$

$f(x) = x^3 - 3x + 6, f(x) = \frac{x+2}{x}, f(x) = \sqrt{x} - 4, f(x) = x\sqrt{x}, f(x) = (x+4)^3, f(x) = (x+5)^3,$

$f(x) = x^{2017}e^x, f(x) = x^5\ln x, f(x) = (x+2)\ln x, f(x) = x + 11 - \frac{12}{x}, f(x) = x - \frac{1}{x},$

$f(x) = x + \frac{1}{x}, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(x) = e^x - \frac{1}{x}, f(x) = x\,\mathrm{tg}x, f(x) = e^x\ln x, f(x) = \frac{e^x}{\ln x}, f(x) = \frac{e^x}{x^2},$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = e^x - e^{-x}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f(x) = x + e^{-x}, f(x) = x^{2008} - 2008(x-1) - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}, f(x) = e^x + x^2, f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}, f(x) = e^x(2x^2 + 4x + 5), f(x) = -x^2 + x,$

$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, f(x) = x - 2\ln x, f(x) = \frac{e^x}{x+1}, f(x) = \frac{\ln x}{x}, f(x) = e^{-x} - 1, f(x) = -e^{-x},$

$f(x) = e^x - 1, f(x) = \frac{e^x}{x^2}, f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, f(x) = \frac{e^x}{x+2}, f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1},$

$f(x) = x - e\ln x, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x, f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x, f(x) = e^x - x, f(x) = e^x - x - 1,$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}, f(x) = \ln x + 7, f(x) = x - \ln x, f(x) = x^2 + e^x, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x - \frac{1}{e^x},$

$f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x+e^x}, f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x, f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x, f(x) = \frac{x-\ln x}{x+\ln x},$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x) = \ln x - x + 1, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, f(x) = x^{2008} + 2008^x,$

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x) = x^2 + e^x, f(x) = (x-1)e^x, f(x) = xe^x, f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}, f(x) = x - 2\ln x,$

$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, f(x) = (x-2)\ln x, f(x) = 1 + \sqrt{x}, f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f(x) = \sqrt{x} + x, f(x) = x\sqrt[3]{x},$

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12, f(x) = (x^2 - 1)\ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = 3^x + 1,$

$f(x) = e^x - x - 1, f(x) = e^x - 1, f(x) = e^x - ex - 1, f(x) = x - \ln x, f(x) = \frac{x+1}{x-1},$

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1, f(x) = 2^x - x\ln 2, f(x) = \frac{x+1}{x-3}, f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1},$

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, f(x) = \frac{2x+3}{x+2}, f(x) = x + \frac{3}{2}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,$

$f(x) = x^3 + 3x, f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}, f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = \ln x + 8, f(x) = \frac{3}{x}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x},$

$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+2}, f(x) = (x-1)(x-2),$

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f(x) = (x-3)\ln x, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, f(x) = 2^x + 3^x, f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1},$

$f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, f(x) = (x-3)\sqrt{x}, f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \frac{x^2-x+1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+1}{x},$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}, f(x) = x\ln x - x, f(x) = x^3 - 3x + 1, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x,$

$f(x) = x^2 - x - \ln x, f(x) = \frac{e^x}{x}, f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1, f(x) = xe^x, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = \frac{x^3}{\ln x},$

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x) = \frac{e^x}{x-1}, f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 4,$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, f(x) = x^3 + 3x, f(x) = \ln x + \frac{x^2}{x}, f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x},$

$f(x) = (x-1)(x-2), f(x) = (x-3)\ln x, f(x) = x^{2016} + 2016x, f(x) = 2016^x - x^{2016},$

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = e^x + e^{-x}, f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}, f(x) = x - e^{-x}, f(x) = x^{2017} + 2017(x-1) - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2}, f(x) = e^x - x^2, f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}, f(x) = e^x(2x^2 - 4x + 5), f(x) = x^2 - x,$

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}, f(x) = x + 2\ln x, f(x) = \frac{e^x}{x-1}, f(x) = \frac{\ln x}{-x}, f(x) = e^{-x} + 1, f(x) = -e^{-x} + x,$

$f(x) = e^x + 1, f(x) = \frac{-e^x}{x^2}, f(x) = (x+5)^2 + (x-5)^2, f(x) = \frac{-\ln x}{x^2}, f(x) = \frac{e^x}{x-2}, f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1},$

$f(x) = x + e\ln x, f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x, f(x) = \frac{x^4}{4} + \ln x, f(x) = e^x + x, f(x) = e^x - x + 1,$

$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, f(x) = \ln x - 7, f(x) = x + \ln x, f(x) = x^2 - e^x, f(x) = x^{2018}\ln x, f(x) = x + \frac{1}{e^x},$

www.mateinfo.ro

$f(x)=1-\frac{2e^x}{x-e^x}$, $f(x)=(x^2-2x+3)e^x$, $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $f(x)=(x^2+3x-3)e^x$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$,
$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $f(x)=\ln x+x+1$, $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$, $f(x)=x^{2017}-2017^x$,
$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $f(x)=x^2-e^x$, $f(x)=(x+1)e^x$, $f(x)=3x-xe^x$, $f(x)=\frac{x^2-3}{x+1}$, $f(x)=x+2\ln x$,
$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$, $f(x)=(x+2)\ln x$, $f(x)=1-\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x)=\sqrt{x}-x$, $f(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x}$,
$f(x)=x^4+6x^2-18x+12$, $f(x)=(x^2+1)\ln x$, $f(x)=x^5\ln x$, $f(x)=x4^x$, $f(x)=e^x+x-1$,
$f(x)=e^x+1$, $f(x)=e^x+ex+1$, $f(x)=x+2\ln x$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $f(x)=2x^3+15x^2-24x-1$,
$f(x)=2^x+x\ln 2$, $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$, $f(x)=e^x-\frac{x-1}{x}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$, $f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$,
$f(x)=x-\frac{3}{x}$, $f(x)=x^3+3x^2+4$, $f(x)=x^3+5x^2-8x-4$, $f(x)=x^3-3x$, $f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}$,
$f(x)=x-\sqrt{x}$, $f(x)=\ln x-8$, $f(x)=-\frac{3}{x}$, $f(x)=x^3-\frac{3}{x}$, $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-2}$, $f(x)=(x+1)(x-2)$,
$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, $f(x)=(x+3)\ln x$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, $f(x)=2^x-3^x$, $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$,
$f(x)=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$, $f(x)=(x+3)\sqrt{x}$, $f(x)=3^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^7}$,
$f(x)=x\ln x+x$, $f(x)=x^3+3x+1$, $f(x)=2x^3+3x^2+1$, $f(x)=2\sqrt{x}+\ln x$,
$f(x)=x^2+x-\ln x$, $f(x)=\frac{e^x}{-x}$, $f(x)=(x^2-1)e^x-1$, $f(x)=2xe^x$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$, $f(x)=\frac{-x^3}{\ln x}$,
$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$, $f(x)=x-2+3\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$, $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$, $f(x)=x^3+3x^2-4$,
$f(x)=x^3+5x^2-8x-4$, $f(x)=x^3-3x$, $f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}$, $f(x)=x-\sqrt{x}$, $f(x)=x^3-\frac{3}{x}$,
$f(x)=(x-1)(x+2)$, $f(x)=(x+3)\ln x$, $f(x)=x^{2016}-2016x$, $f(x)=2016^x+x^{2016}$,
$f(x)=x+2\ln x+2017$, $f(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$, $f(x)=(x+2016)e^x$, $f(x)=(3x+2)e^x$,
$f(x)=x^2+\ln x+2016$, $f(x)=\frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+4}$, $f(x)=(x-6)\ln x$, $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+4}$, $f(x)=x(x^2-16)+4$,
$f(x)=\frac{x}{x^2+25}$, $f(x)=\frac{x}{x^6+9}$, $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+2}$, $f(x)=3+\frac{x-3}{e^x}$.

2.Calculați $f''(x)$ pentru următoarele funcții:

$f(x)=x^3+3x$, $f(x)=x^2e^x$, $f(x)=\cos x-\sin x$, $f(x)=x+\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{x}-x$, $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$,
$f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$, $f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}$, $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $f(x)=x^3\ln x$, $f(x)=x\ln x$, $f(x)=3x^2+6x$,
$f(x)=x^3+5x$, $f(x)=e^x-x$, $f(x)=2x+\ln x$, $f(x)=x^2\ln x$, $f(x)=x^3e^x$, $f(x)=(2x+1)\ln x$,
$f(x)=(x^2+1)\ln x$, $f(x)=\cos^2x$, $f(x)=\sin^3x$, $f(x)=\cos^4x$, $f(x)=x\cos x+\sin x$, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$,
$f(x)=x\sin x-\cos x$, $f(x)=x^3\sqrt{x}$, $f(x)=x\,\mathrm{ctg}x$, $f(x)=x\sin x$, $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$, $f(x)=e^x\sin x$, $f(x)=e^x\cos x$, $f(x)=x^3+x^2+x+1$,
$f(x)=x^4+3x^2+2$, $f(x)=3\sin x+4\cos x$, $f(x)=3\sqrt{x}+5x$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$, $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$,
$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x}$, $f(x)=x^4\ln x$, $f(x)=5x^2+2x+3$, $f(x)=3x+\ln x$, $f(x)=(x^2+x+1)\ln x$,
$f(x)=(x^2+x+1)e^x$, $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $f(x)=x\ln x$, $f(x)=(x^2+x)\ln x$, $f(x)=x^5e^x$,
$f(x)=x^{10}+x^5$, $f(x)=\sin^6x$, $f(x)=\cos^5x$, $f(x)=x^3\sin x$, $f(x)=x^2\sin^3x$, $f(x)=x^3\cos^2x$,
$f(x)=e^x\ln x$, $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $f(x)=x^2(\sin x-\cos x)$, $f(x)=x^5+3x^4-5x^2+2$,
$f(x)=4\sin x+3\cos x$, $f(x)=\frac{x+4}{x-4}$, $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x-3}$, $f(x)=\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$, $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x+1}$, $f(x)=\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$,

$f(x)=\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$, $f(x)=\frac{x+7}{x+6}$, $f(x)=(x+2)e^x$, $f(x)=(3x-2)e^x$, $f(x)=\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}$.

Limitele unor funcții

Funcțiile cu nume se numesc funcții elementare,o să numim funcții elementare și operațiile cu aceste funcții cu nume.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție elementară și $a\in D\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{c}{\infty}=0$

Pentru $x_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}=\frac{a}{d}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}=\frac{a}{d}.$$

Pentru calculul unor limite de funcții utilizăm și regula lui l'Hospital, pe care o expunem pe pagina următoare.

Continuitate

Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$,$a\in\mathbb{R}$,a punct de acumulare pentru D

f este continuă în a $\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=f(a)$

f este continuă în a $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$,$a\in\mathbb{R}$,a punct izolat pentru $D\Longrightarrow f$ continuă în a.

Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval atunci ea păstrează semn constant pe acel interval.

Fie I interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.Dacă $f(x)\neq 0\,\forall x\in I\Rightarrow f(x)>0\,\forall x\in I$ sau $f(x)<0\,\forall x\in I$.

Fie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.Dacă $\varphi(a)\varphi(b)<0$ atunci există cel puțin un $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi(c)=0$.

Fie $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\varphi(x)\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}\varphi(x)<0$ atunci există cel puțin un $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi(c)=0$.

Asimptote

Asimptote verticale

Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$,$a\in\mathbb{R}$,a punct de acumulare pentru D

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)\in\{\pm\infty\}\Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la stânga la $\mathcal{G}_f$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\in\{\pm\infty\}\Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la dreapta la $\mathcal{G}_f$

Dacă dreapta d:x=a este asimptotă verticală la stânga și la dreapta atunci spunem că d:x=a este asimptotă verticală bilaterală la $\mathcal{G}_f$

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+=-\infty$, $\ln\infty=\infty$

Asimptote orizontale

$\lim_{x\to\infty} f(x) = k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow d{:}y=k$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow d{:}y=k$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$

Asimptote oblice

Dacă $\exists m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ și $\exists n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R} \Rightarrow d{:}y=mx+n$ asimptotă oblică spre $+\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Dacă $\exists m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ și $\exists n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R} \Rightarrow d{:}y=mx+n$ asimptotă oblică spre $-\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Derivată unei funcții într-un punct,ecuația tangentei,derivata de ordin doi

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Ex.Fie $f(x) = x^3 - 2x$, calculați $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

$f'(x) = 3x^2 - 2$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3-2 = 1$

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0)$, $f''(x) = (f'(x))'$

Dacă $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ atunci ecuația tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A(x_0, f(x_0))$ este $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$,iar panta tangentei este $m=f'(x_0)$

Dacă $f'(x_0)\in\{\pm\infty\}$ atunci ecuația tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A(x_0, f(x_0))$ este $x = x_0$

Regula lui l'Hospital

$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Rolul derivatei de ordin 1 și 2 în studiul funcțiilor

Fie M un interval și f o funcție

dacă $f'(x) > 0\ \forall x\in M \Rightarrow$ f este strict crescătoare pe M

dacă $f'(x) \geq 0\ \forall x\in M \Leftrightarrow$ f este crescătoare pe M

dacă $f'(x) < 0\ \forall x\in M \Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe M

dacă $f'(x) \leq 0\ \forall x\in M \Leftrightarrow$ f este descrescătoare pe M

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	− − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ $f(x_0)$ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗

$\Rightarrow x_0$ este punct de minim local al lui f , $f(x_0)$ este valoare minimă locală a lui f

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ $f(x_0)$ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘

$\Rightarrow x_0$ este punct de maxim local al lui f , $f(x_0)$ este valoare maximă locală a lui f

Fie M un interval și f o funcție

dacă $f''(x) \geq 0\ \forall x\in M \Leftrightarrow$ f este convexă pe M

dacă $f''(x) \leq 0\ \forall x\in M \Leftrightarrow$ f este concavă pe M

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	− − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	concavă $f(x_0)$ convexă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune a lui f

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	convexă $f(x_0)$ concavă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune al lui f

Subiectul III1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+16}$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{(6-x)(6+x)}{(x^2+16)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c)Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+25}$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{(5-x)(5+x)}{(x^2+25)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c)Determinați mulțimea valorilor funcției f.

3.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{3+x^4}$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{3(1+x^2)(1-x^2)}{(x^4+3)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.

c)Determinați mulțimea valorilor funcției f.

4.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^4+3}$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{3(1-x^2)(1+x^2)}{(x^4+3)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.

c)Determinați mulțimea valorilor funcției f.

5.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3-12x+15$.

a)Arătați că $f'(x) = 3(x+2)(x-2), x\in\mathbb{R}$.

b)Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 0]$.

c)Demonstrați că $f(x)\geq -1$, pentru orice $x\in[-2, +\infty)$.

6.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3-3x+5$.

a)Arătați că $f'(x) = 3(x+1)(x-1), x\in\mathbb{R}$.

b)Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 0]$.

c)Demonstrați că $f(x)\geq 3$, pentru orice $x\in[-1, +\infty)$

7.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 9x^3 - 6x^2 + x + 1$.

a)Arătați că $f'(x) = (3x-1)(9x-1), x\in\mathbb{R}$.

b)Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstrați că $f(x) \le \frac{85}{81}$, pentru orice $x\in(-\infty, \frac{1}{9}]$.
8.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 8x^3 - 5x^2 + x + 1$.
a)Arătați că $f'(x) = (6x-1)(4x-1), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)}$.
c)Demonstrați că $f(x) \le \frac{115}{108}$, pentru orice $x\in(-\infty, \frac{1}{4}]$.
9.Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}, x\in(3,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este convexă pe $(3,+\infty)$.
10.Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}, x\in(-3,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-3,+\infty)$.
11.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5 + \frac{x-5}{e^x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{6-x}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că funcția f este convexă pe $[7,+\infty)$.
c)Demonstrați că $x-5 \le e^{x-6}$, pentru orice număr real x.
12.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2 + \frac{x-2}{e^x}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{3-x}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că funcția f este convexă pe $[4,+\infty)$.
c)Demonstrați că $x-2 \le e^{x-3}$, pentru orice număr real x.

13.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.
a)Arătați că $f'(x) = 3x(x-2), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
c)Demănstrați că $f(x) \ge 1$,pentru orice $x\in[0,+\infty)$.
14.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
a)Arătați că $f'(x) = 3x(x-2), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
c)Demănstrați că $f(x) \ge -3$,pentru orice $x\in[0,+\infty)$.
15.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{x^2+7}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(7-x)(x+1)}{(x^2+7)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $-1 \le f(x) + f(y) \le \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

16.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(9-x)(x+1)}{(x^2+9)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $-1 \le f(x) + f(y) \le \frac{1}{9}$, pentru orice numere reale x și y.
17.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-5)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = (x-4)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
c)Demonstrați că $-e^4 \le f(x) \le 0$, pentru orice $x\in(-\infty, 5]$.
18.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-4)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = (x-3)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
c)Demonstrați că $-e^3 \le f(x) \le 0$, pentru orice $x\in(-\infty, 4]$.
19.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2-3x+3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-2x(x-2)}{(x^2-3x+3)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{2}{3} \le f(x) + f(y) \le 6$, pentru orice numere reale x și y.
20.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $1 \le f(x) + f(y) \le 3$, pentru orice numere reale x și
21.Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-10)(x+2)}{(x-4)^2}, x\in(4,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f nu are puncte de inflexiune.
22.Se consideră funcția $f:(5,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+6x}{x-5}$
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-15)(x+5)}{(x-5)^2}, x\in(5,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f nu are puncte de inflexiune.
23.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^6 - 6x + 12$.
a)Arătați că $\lim_{x\to1} \frac{f(x)-7}{x-1} = 0$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că $f(0{,}9) + f(1{,}1) \ge 14$.
24.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^6 - 6x + 9$.
a)Arătați că $\lim_{x\to1} \frac{f(x)-4}{x-1} = 0$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c)Demonstrați că $f(0,9) + f(1,1) \geq 8$.
25.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
a)Arătați că $f'(x) = 12(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 0$.
c)Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 16$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
26.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
a)Arătați că $f'(x) = 6(x-1)(x+2), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 0$.
c)Demonstrați că $0 \leq f(x) \leq 27$, pentru orice $x\in[-2,1]$.
27.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^2 + 9$.
a)Arătați că $f'(x) = 4x(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{f(x)-x^4} = -\frac{1}{2}$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
28.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$.
a)Arătați că $f'(x) = 12x(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{f(x)-3x^4} = -\frac{1}{6}$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
29.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x + 4$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(x^2+2), x\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+3} = 2$.
c)Demonstrați că $-3 \leq f(x) \leq 11$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
30.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + 12x + 10$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(x^2+4), x\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2} = 6$.
c)Demonstrați că $-3 \leq f(x) \leq 23$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
31.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.
a)Arătați că $f'(x) = (x+3)(3x+3), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq -4$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.
32.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
a)Arătați că $f'(x) = (x-1)(3x-1), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$.
c)Demonstrați că $f(x) \leq \frac{4}{27}$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$.
33.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.
a)Arătați că $f'(x) = 6(x-1)(x+2), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-f(x)}{f'(x)}$.

c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
34.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$.
a)Arătați că $f'(x) = 6(x-2)(x-3), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-f(x)}{f'(x)}$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=2, situat pe graficul funcției f.
35.Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-4}$.
a)Arătați că $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = 0$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(4,+\infty)$.
36.Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-3}$.
a)Arătați că $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = 0$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(3,+\infty)$.
37.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 27x - x^3$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(9-x^2), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)} = 0$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=3 situat pe graficul funcției f.
38.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 48x - x^3$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(16-x^2), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)} = 0$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=4 situat pe graficul funcției f.
39.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7$.
a)Arătați că $f'(x) = 6x(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-21}{x-2} = 36$.
c)Demonstrați că $f(x) \leq -6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.
40.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$.
a)Arătați că $f'(x) = 6x(x-1), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-30}{x-3} = 36$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq 2$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.
41.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 27x$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(x-3)(x+3), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+27x}{x} = 0$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq -54$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.
42.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 3x$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(1-x)(x+1), x\in\mathbb{R}$.

b)Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{3x-f(x)}{x}=0$.
c)Demonstrați că $f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.
43.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^3+27x-44$.
a)Arătați că $f'(x)=3(3-x)(3+x), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=-21$.
c)Demonstrați că $f(x)\le 10$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.
44.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x^3+6x+4$.
a)Arătați că $f'(x)=6(1-x)(1+x), x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-18$.
c)Demonstrați că $f(x)\le 8$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.
45.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-2x^2+x-2$.
a)Arătați că $f'(x)=3x^2-4x+1, x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to +\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=3$.
c)Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta y=5x+4.
46.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x^2+2x-2$.
a)Arătați că $f'(x)=3x^2-2x+2, x\in\mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x\to +\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=3$.
c)Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta y=3x+4.
47.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-48x$.
a)Arătați că $f'(x)=3(x-4)(x+4), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=4, situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că $-128\le f(x)\le 128$, pentru orice $x\in[-4,4]$.
48.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-75x$.
a)Arătați că $f'(x)=3(x-5)(x+5), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=5, situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că $-250\le f(x)\le 250$, pentru orice $x\in[-5,5]$.
49.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+3}{x}$.
a)Calculați $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{2020}{2017}\le f(x)\le 4$, pentru orice $x\in[1,2017]$.
50.Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+2}{x+1}$.
a)Calculați $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că $\frac{2018}{2017}\le f(x)\le \frac{3}{2}$, pentru orice $x\in[1,2016]$.
51.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+3$.
a) Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}$.
c)Arătați că $1\le f(x)\le 5$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
52.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x-1$.
a) Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}$.
c)Arătați că $-3\le f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
53. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-6x+4$.
a)Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=2, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(2015)+f(2017)\le f(2016)+f(2018)$.
54. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^3-9x+2$.
a)Arătați că $f'(x)=9(x-1)(x+1), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(2014)+f(2016)\le f(2015)+f(2017)$.
55. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
56. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\frac{1}{x}+2018$.
a) Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.
57. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-6x^2+4$.
a)Arătați că $f'(x)=6x(x-2), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.
c)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
58. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+9x^2+10$.
a)Arătați că $f'(x)=6x(x+3), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.
c)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
59.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-8x^2+7$.
a)Arătați că $f'(x)=4x(x-2)(x+2), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=2, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $0\le f(x)\le 7$, pentru orice $x\in[-2,2]$.
60.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-18x^2+17$.

a)Arătați că $f'(x) = 4x(x-3)(x+3), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=3, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $0 \le f(x) \le 17$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
61. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$.
a)Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
b)Arătați că $f'(x) = -\frac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}, x\in\mathbb{R}$.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
62.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.
a)Calculați $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.
b)Arătați că $f'(x) = -\frac{4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}, x\in\mathbb{R}$.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
63.Se consideră funcția $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-5}{x+5}$.
a)Calculați $f'(x), x\in(-5,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
64.Se consideră funcția $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.
a)Calculați $f'(x), x\in(-\infty,2)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
65.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x$.
a)Arătați că $f'(x) = 2x - 3, x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$ situat pe graficul funcției f.
66.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$.
a)Arătați că $f'(x) = 2x - 2, x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$ situat pe graficul funcției f.
67.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - \ln x$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.
b)Arătați că $f'(x) = 6x - \frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.
c)Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
68.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln x - x^2$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$.
b)Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x, x\in(0,+\infty)$.

c)Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.
69.Se consideră funcția $f:(5,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-4}{x-5}$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 2$.
b)Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-5)^2}, x\in(5,+\infty)$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 6$, situat pe graficul funcției f.
70.Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-4}{x-3}$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$.
b)Arătați că $f'(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x\in(3,+\infty)$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f.
71.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Arătați că $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{2}{9}$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.
72.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x + \ln x - \frac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Arătați că $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.
73. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-4)e^x$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -4$.
b)Arătați că $f'(x) = e^x + f(x)$ pentru orice număr real x.
c) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+4}{x} = 0$.
74. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-5)e^x$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -5$.
b)Arătați că $f'(x) = e^x + f(x)$ pentru orice număr real x.
c) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+5}{x} = 0$.
75. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x - x + 1$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $e^x \ge x + 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
76. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x - x + 2$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
77.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 27x + 36$.
a)Arătați că $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -27$.
b)Calculați $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x(2x+1)(4x+3)}$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq -18$ pentru orice $x \in [-3, +\infty)$.
78.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 9$.
a)Arătați că $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -3$.
b)Calculați $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x(3x+1)(2x+3)}$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq 7$ pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.
79.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 9 - \frac{10}{x}$.
a)Verificați dacă $f'(x) = \frac{x^2+10}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
c)Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.
80.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{11}{x} - x - 10$.
a)Verificați dacă $f'(x) = -\frac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b)Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
c)Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
81.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+5)^3$.
a)Verificați dacă $f'(x) = 3x^2 + 30x + 75$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Calculați $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{x^2}$.
82.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+6)^3$.
a)Verificați dacă $f'(x) = 3x^2 + 36x + 108$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c)Calculați $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{x^2}$.
83.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x}$.
a)Calculați $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
b)Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcției f.
84.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{x}$.
a)Calculați $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$
c)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcției f.
85. Se consideră funcția $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x} - 3$.
a)Arătați că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b)Verificați dacă dreapta de ecuație $y=\frac{1}{6}x - \frac{3}{2}$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 9$, situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.
86. Se consideră funcția $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x} - 4$.
a)Arătați că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b)Verificați dacă dreapta de ecuație $y=\frac{1}{4}x - 3$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.
87.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = (x+3)e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b)Verificați dacă $f''(x)+f(x) = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c)Arătați că funcția f are un punct de extrem.
88.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = xe^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b)Verificați dacă $f''(x)+f(x) = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c)Arătați că funcția f are un punct de extrem.
89. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x\ln x$.
a)Verificați dacă $f'(x) = 2 + 2\ln x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq -\frac{2}{e}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
90. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + x\ln x$.
a)Verificați dacă $f'(x) = 2 + \ln x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$.
c)Demonstrați că $f(x) \geq -\frac{1}{e^2}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
91.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x^2 - 12) + 2$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(x-2)(x+2), x \in \mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)+7}{x-3} = 15$.
c)Demonstrați că $-14 \leq f(x) \leq 18$, pentru orice $x \in [-2,2]$.
92.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x^2 - 12) + 5$.
a)Arătați că $f'(x) = 3(x-2)(x+2), x \in \mathbb{R}$.
b)Arătați că $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)+4}{x-3} = 15$.
c)Demonstrați că $-11 \leq f(x) \leq 21$, pentru orice $x \in [-2,2]$.
93.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) + \ln(x^2 + 1) < 4$, pentru orice $x \in [0,1]$.
94.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+6}{x^2+1}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c)Demonstrați că $f(x)+\ln(x^2+1)<\frac{9}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

95.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1-x)\ln x^2$.

a)Arătați că $f'(x)=\frac{2}{x}-2\ln x-2, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că funcția f, este crescătoare pe intervalul $(0,1]$.

96.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)\ln x^3$.

a)Arătați că $f'(x)=3-\frac{3}{x}+3\ln x, x\in(0,+\infty)$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că funcția f, este descrescătoare pe intervalul $(0,1]$.

97.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2-2x+2}$.

a)Arătați că $f'(x)=\frac{-4(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c)Determinați imaginea funcției f.

98.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}$.

a)Arătați că $f'(x)=\frac{-4(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c)Determinați imaginea funcției f.

Tabel de integrale nedefinite

$\int dx=\int 1\,dx=x+C$	$\int e^x\,dx=e^x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2x}dx=-\mathrm{ctg}x+C$
$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$	$\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$
$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$	$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$
$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int \frac{1}{\cos^2x}dx=\mathrm{tg}x+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\int \mathrm{tg}x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	$\int \mathrm{ctg}x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	

Integrala nedefinită,primitive

Fie $f,F:I\to\mathbb{R}$ două funcții și I un interval.

F se numește primitivă a lui f $\Leftrightarrow\begin{cases}\text{F este derivabilă}\\ F'=f,(F'(x)=f(x),\forall x\in I)\end{cases}$

$\int f(x)\,dx=\{F(x)|F$ este primitivă a lui f$\}$ se numește mulțimea primitivelor funcției f

$\mathcal{C}=\{k:I\to\mathbb{R}|k(x)=k,\forall x\in\mathbb{R}\}$se numește mulțimea funcțiilor constante

Dacă F este o primitivă a lui f atunci $\int f(x)\,dx=F(x)+\mathcal{C}$

$\int f'(x)\,dx=f(x)+\mathcal{C}$

$\int f''(x)\,dx=f'(x)+\mathcal{C}$

Proprietăți pentru integrala nedefinită

$\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$ $\quad\int\big(f(x)-g(x)\big)dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

$\int \alpha f(x)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx$ $\quad\int\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)dx=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx$

Primitive

1.Calculați următoarele integrale nedefinite:

$\int dx, \int\frac{5}{4}dx, \int x^8\,dx, \int\frac{1}{x^6}dx, \int(3x+1)^2\,dx, \int x(2-x)^2\,dx, \int\sqrt[4]{x}\,dx, \int\sqrt[5]{x}\,dx,$

$\int\left(-3x+4\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}\right)dx, \int\frac{4x^3-5x+6}{x^5}dx, \int x\left(3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}\right)dx, \int\frac{4x-1}{x^5}dx, \int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4\sqrt[3]{x}}{x}\right)dx,$

$\int\frac{1}{x^2-25}dx, \int\frac{1}{x^2+36}dx, \int\frac{1}{25-x^2}dx, \int\frac{1}{x^2+4}dx, \int\left(\frac{1}{x^2+9}-\frac{3}{9-x^2}\right)dx, \int\frac{(x^2-4)(x^2-5)}{x}dx, \int\frac{1}{x^2+6}dx,$

$\int\frac{(x^2-1)(3x+2)}{\sqrt{x}}dx, \int(-3\sin x+4\cos x)\,dx, \int\left(\frac{4}{\sin^2x}+\frac{3}{\cos^2x}\right)dx, \int(\mathrm{ctg}x+3\mathrm{tg}x)\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx,$

$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx, \int(3^x+4^{x+1}+5^{x+2})\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx, \int\frac{\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx, \int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}},$

$\int\frac{dx}{6+5x^2}, \int\frac{dx}{6-5x^2}, \int\frac{dx}{5x^2-6}, \int(3x^4-5x^3+4x^2-3x+2)\,dx, \int(x^2-3x)^3\,dx,$

$\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^5}-\frac{5}{x}\right)dx, \int\left(5x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx, \int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-12x^4\cdot\sqrt[4]{x}\right)dx, \int\frac{1}{9x^2-1}dx, \int\frac{10}{25x^2-9}dx,$

$\int\frac{8}{16x^2+1}dx, \int\frac{25}{5x^2+125}dx, \int(6^x\ln6-5^x\ln25)\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{5x^2-45}}dx, \int\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx,$

$\int(x^8-5)\,dx, \int(5\sin x+6\cos x)\,dx, \int\left(4\sin^2x-\sqrt[3]{-64}\cos^2x\right)dx, \int 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx, \int 10\cos^2\frac{x}{2}dx,$

$\int 10\sin^2x\,dx, \int(6x^5-3x^4+2x-9)\,dx, \int(7x^2-4x+2)\,dx, \int 7^x\,dx, \int\frac{1}{x^2-49}dx, \int x^9\,dx,$

$\int\cos x\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-49}}dx, \int\sin x\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{49-x^2}}dx, \int\frac{1}{x^2+49}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+49}}dx, \int x^8\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx,$

$\int\sin x\,dx, \int\frac{1}{x^2+25}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx, \int\frac{1}{x^2-25}dx, \int\cos x\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx, \int 9^x\,dx, \int 7^x\,dx, \int\frac{1}{x^2-64}dx,$

$\int x^{14}\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{64-x^2}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-64}}dx, \int\frac{1}{x^2+64}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+64}}dx, \int x^{15}\,dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+81}}dx, \int\frac{1}{x^2+81}dx,$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-81}}dx, \int\frac{1}{x^2-81}dx, \int\frac{1}{\sqrt{81-x^2}}dx, \int 8^x\,dx, \int 10^x\,dx, \int x^8\,dx, \int 10^x\,dx, \int x^{17}\,dx, \int 17^x\,dx,$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+100}}dx, \int\frac{1}{x^2+100}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-100}}dx, \int\frac{1}{x^2-100}dx, \int\frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx, \int 13^x\,dx, \int x^{13}\,dx, \int x^9\,dx,$

$\int\frac{1}{x^2-100}dx, \int\frac{1}{\sqrt{100-x^2}}dx, \int 13^x\,dx, \int x^{13}\,dx, \int x^9\,dx, \int\frac{1}{x^2+7}dx, \int\frac{1}{x^7-7}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}dx,$

$\int\frac{1}{\sqrt{7-x^2}}dx, \int\frac{1}{x^2+10}dx, \int\frac{1}{x^2-10}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+10}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-10}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{10-x^2}}dx, \int\frac{1}{9+x^2}dx, \int\frac{1}{9-x^2}dx,$

$\int\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx, \int x^6\,dx, \int 9x^8\,dx, \int x^{\frac{5}{6}}\,dx, \int\sqrt[6]{x^5}\,dx, \int x^{-\frac{7}{2}}\,dx, \int 13x\sqrt[5]{x^4}\,dx,$

$\int\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx, \int e^x\,dx, \int 6^x\,dx, \int\frac{1}{x^2-16}dx, \int\frac{1}{25+x^2}dx, \int\frac{1}{x^2+25}dx, \int\frac{1}{x^2-25}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx,$

$\int\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx, \int\frac{1}{(x-5)(x+5)}dx, \int\frac{1}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}dx, \int\frac{1}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}dx, \int\frac{1}{(5-x)(5+x)}dx, \int\frac{1}{x^2-6}dx, \int\frac{1}{6-x^2}dx,$

$\int \frac{1}{x^2+6}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}}dx$, $\int (2x^5+3x^4-4x^3+2x-3)\,dx$, $\int (\sin x + x)\,dx$,
$\int \frac{4x^4-3x^3+x^2+3x+2}{x^3}dx$, $\int \left(\frac{2}{6+x^2}+\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (2\sin x+3\cos x)\,dx$, $\int \left(3e^x-\frac{4}{x}+3\cdot 5^x\right)dx$,
$\int \left(\frac{6}{25x^2-9}-\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int \left(x^3\cdot\sqrt[3]{x}+3x\cdot\sqrt{x^5}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-25}+5}{x^2-25}dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$,
$\int (3x^6-5x^4+2x^3+3x-2)\,dx$, $\int \frac{3x^4+4x^3-x^2+2x+3}{x^2}dx$, $\int \left(\frac{3}{7+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)dx$, $\int (1-\sin x)\,dx$,
$\int (2\cos x+3\sin x)\,dx$, $\int \left(3\cdot e^x-\frac{2}{x}+4\cdot 3^x\right)dx$, $\int \left(\frac{6}{16x^2-9}-\frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\right)dx$, $\int (x+\mathrm{tg}x)\,dx$,
$\int \left(x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2x\cdot\sqrt{x^3}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-16}+4}{x^2-16}dx$, $\int \frac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$, $\int (6x^4-5x^3+4x^2-4x+2)\,dx$,
$\int (x^2-3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{5}{x^3}-\frac{7}{x^5}-\frac{6}{x}\right)dx$, $\int \left(9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-31x^5\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}dx$,
$\int \frac{20}{4x^2-9}dx$, $\int \frac{3}{9x^2+1}dx$, $\int \frac{10}{5x^2+125}dx$, $\int (7^x\cdot\ln 7-5^x\cdot\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{7x^2+28}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}dx$,
$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$, $\int (5\sin x+3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin x-3\cos x)\,dx$, $\int \left(5\sin^2 x-\sqrt[3]{-125}\cos^2 x\right)dx$,
$\int e^x\left(3+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int 3^x\left(3^{-x}+3^{-x}\cdot x^3+6+5^x+\frac{3^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{6x^5+x^2-x+1}{x^3}dx$, $\int \frac{4x^3-x^4}{\sqrt{x}}dx$,
$\int \left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2-6}+\frac{3}{\sqrt{x^2-6}}\right)dx$, $\int \left(\frac{5}{x^2-4}-\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$,
$\int \left(\frac{5}{x^2+4}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}-\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}dx$, $\int (x^4-5x^3+2x^2+x-3)\,dx$,
$\int \left(3x^2-6x+\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^3-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^3}\right)dx$, $\int \left(5\sqrt[6]{x}-3\sqrt[4]{x}+4x-2\sqrt{x}\right)dx$, $\int \left(x^4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)dx$,
$\int (x^5-3x^2+2x-6)\,dx$, $\int \left(5x^2-7x+\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)dx$, $\int \left(3x\sqrt{x}-4x\sqrt[3]{x^2}\right)dx$,
$\int \left(6\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}+3x^2-5+\frac{6}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^3}dx$, $\int \frac{\sin^3 x-5}{\sin^2 x}dx$, $\int (x^2-3e^x)\,dx$, $\int (x^5+2e^x)\,dx$,
$\int \left(6^x-\frac{1}{x^3}+e^x+\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2+5)^2}{x^3}dx$, $\int \frac{(x^2-4)^2}{x^4}dx$, $\int \frac{(x^2-2)^2}{x^5}dx$, $\int \left(4x^2\sqrt{x}-3x^4\sqrt[3]{x^5}\right)dx$,
$\int \frac{\cos^3 x+4}{\cos^2 x}dx$, $\int (x^2-3x+5+2e^x)\,dx$, $\int (x^6-8x^2+3x+7+3e^x)\,dx$, $\int \left(\frac{3-2x}{x}\right)^2dx$,
$\int \left(7^x-\frac{1}{x^4}+2e^x-\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+25}}dx$, $\int \frac{1}{9x^2+25}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}dx$,
$\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int \frac{(x-2)^3}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+2)^3}{x^4}dx$, $\int \left(-\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$,
$\int 4^x\left(1-\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{xe^x-5x}{x}dx$, $\int \frac{x\cdot 7^x-7x}{x}dx$, $\int e^x\left(4+\frac{5e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$,
$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$, $\int \left(x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}\right)dx$, $\int \left(4x-\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right)dx$, $\int \left(3x+\frac{5}{x^2}\right)dx$, $\int \left(5x-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx$,
$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$, $\int \frac{x-5}{x^3}dx$, $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx$, $\int \left(x^2\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int 7^x\left(3-4^x+\frac{7^{-x}}{x^5}-\frac{7^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$,
$\int 4^x\left(2-3^x+4^{-x}\cdot x^5+\frac{4^{-x}}{x^5}+\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int (6x^4-5x^3+4x^2-5x+2)\,dx$, $\int (x^2-3x)^3\,dx$,
$\int (3x^4+6x^3-5x^2+4x-1)\,dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3}-\frac{6}{x^5}-\frac{4}{x}\right)dx$, $\int \left(9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3}\right)dx$,
$\int \left(5x^3\sqrt{x}+2x\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int (x^2+2x)^3dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-32x^5\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^6}}-14x^5\cdot\sqrt[4]{x}\right)dx$,
$\int \frac{1}{9x^2-1}dx$, $\int \frac{15}{25x^2-9}dx$, $\int \frac{1}{9x^2+1}dx$, $\int \frac{15}{25x^2+9}dx$, $\int \frac{1}{16x^2-1}dx$, $\int \frac{20}{16x^2-25}dx$, $\int \frac{27}{9x^2+1}dx$, $\int \frac{8}{4x^2+64}dx$,
$\int (6^x\ln 6-5^x\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}dx$, $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6x^2+54}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6x^2-54}}dx$,
$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+64}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-100}}dx$, $\int \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7x^2+28}}dx$, $\int (5\sin x+3\cos x)\,dx$, $\int \left(3\sin^2 x-\sqrt[3]{-27}\cos^2 x\right)dx$,

$\int \left(4\cos^2 x-\sqrt[3]{-64}\sin^2 x\right)dx$, $\int 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $\int 4\cos^2\frac{x}{2}dx$, $\int 4\sin^2\frac{x}{2}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}dx$,
$\int \frac{6x^5+3x^4+2x^3-5x^2+3x-4}{x^3}dx$, $\int \frac{6x^3-x^5}{\sqrt{x}}dx$, $\int \frac{x\sqrt[4]{x}+3x^2\cdot\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}dx$, $\int \left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$, $\int \frac{(x-1)^4}{x^3}dx$,
$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-9}}dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{9-x^4}}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}dx$, $\int \left(7^x\ln\sqrt[3]{49}-\ln 5\cdot 25^x\right)dx$.

Integrala definită, proprietăți pentru integrala definită

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa, atunci
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ se numește integrala definită a funcției f.

$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\big|_a^b = f(b)-f(a)$

$\int_a^b f''(x)\,dx = f'(x)\big|_a^b = f'(b)-f'(a)$

$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$, $\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$,

$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

Integrale definite

1.Calculați următoarele integrale definite:

a) $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_1^3 x\,dx$, $\int_0^1 (x+1)\,dx$, $\int_1^2 (x+2)\,dx$, $\int_{-1}^1 (x^3+3x)\,dx$, $\int_0^1 (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$,
$\int_0^1 x\,dx$, $\int_0^{2014} dx$, $\int_0^2 x^2\,dx$, $\int_0^1 \frac{-2x^2}{x^2+1}dx$, $\int_2^3 (x+1)dx$, $\int_1^2 x\,dx$, $\int_0^1 (3x+1)\,dx$, $\int_1^2 2x\,dx$,
$\int_1^2 (2x+3)\,dx$, $\int_0^1 x^3\,dx$, $\int_0^3 x\,dx$, $\int_0^1 (x+4)\,dx$, $\int_1^2 (x-2)\,dx$, $\int_{-1}^1 (x^3-3x)\,dx$,
$\int_0^1 (4x^3-3x^2+2x-1)\,dx$, $\int_0^1 4x\,dx$, $\int_1^{2016} dx$, $\int_0^1 x^{2016}\,dx$, $\int_2^3 \frac{-2x^2}{x^2-1}dx$, $\int_2^3 (x-1)dx$, $\int_2^3 x\,dx$,
$\int_0^1 (3x-4)\,dx$, $\int_1^2 5x\,dx$, $\int_1^2 (2x-3)\,dx$.

b) $\int_1^2 xe^x dx$, $\int_1^2 \ln x\,dx$, $\int_1^e x^3\ln x\,dx$, $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, $\int_0^1 \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$, $\int_2^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$,
$\int_0^1 (3x+1)e^x\,dx$, $\int_0^1 (x^2e^x-2x)\,dx$, $\int_0^1 xe^x dx$, $\int_1^e \ln x\,dx$, $\int_e^{e^2} x^3\ln x\,dx$, $\int_1^{e^2} x^2\ln x\,dx$, $\int_1^2 \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}dx$,
$\int_1^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1 (3x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1 (x^2e^x+2x)\,dx$,

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$, $\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$, $\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx$, $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$, $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$, $\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx$, $\int_2^3 \frac{x^3-1}{x^2-1}dx$, $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$,
$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1}dx$, $\int_2^3 \frac{x^3-3x}{x^2-1}dx$, $\int_2^3 \left(x^2+\frac{x}{x-1}\right)dx$, $\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx$, $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$, $\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx$, $\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$, $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$.

Inegalități integrale

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă și $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e continuă și $m\leq f(x)\leq M\ \forall x\in[a,b]$ atunci
$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue și $f(x)\leq g(x)\ \forall x\in[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$.

Metoda integrării prin părți

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Metoda schimbării de variabilă

$\int_a^b \big((f\circ g)(x)\big)g'(x)dx = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă f este impară } (f(x)=-f(x)\forall x\in[-a,a]) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{ dacă f este pară } \big(f(-x)=f(x)\big) \end{cases}$

Arii,volume

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă și $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ atunci aria subgraficului funcției f sau aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox și dreptele de ecuații x=a și x=b este $\mathcal{A}_{\Gamma_f} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă $\forall x \in [a,b]$ atunci aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox și dreptele de ecuații x=a și x=b este $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă și $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ atunci volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției f este $\mathcal{V}_{C_f} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

Subiectul III2 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră funcția $f:(-3,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$.

a)Arătați că $\int_0^2 x(x+3)\left(f(x) + \frac{1}{x+4}\right) dx = 2$.

b)Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \ln\frac{16875}{16384}$.

c)Determinați numărul natural p, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 are aria egală cu $\ln\left(p^2 + \frac{1}{15}\right)$.

2.Se consideră funcția $f:(-4,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}$.

a)Arătați că $\int_0^2 x(x+4)\left(f(x) + \frac{1}{x+5}\right) dx = 2$.

b)Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \ln\frac{6^5 \cdot 4^4}{5^9}$.

c)Determinați numărul natural p, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 are aria egală cu $\ln\left(p^2 + \frac{1}{24}\right)$.

3.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-3)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = -\frac{5}{2}$.

b)Demonstrați că $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x-4)e^x + 2021$ este o primitivă a funcției f.

c)Calculați $\int_0^3 f^3(x) f'(x)\,dx$.

4.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-4)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = -\frac{7}{2}$.

b)Demonstrați că $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x-5)e^x + 2022$ este o primitivă a funcției f.

c)Calculați $\int_0^4 f^3(x) f'(x)\,dx$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + 10}$.

a)Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 14$.

b)Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx$.

c)Demonstrați că, pentru orice $a \in (0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=a are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{10}$.

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + 11}$.

a)Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 15$.

b)Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx$.

c)Demonstrați că, pentru orice $a \in (0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=a are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{11}$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 12x - 4, x \in (-\infty, 0] \\ x - 4, x \in (0, +\infty) \end{cases}$

a)Arătați că $\int_1^2 f(x)\,dx = -\frac{5}{2}$.

b)Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și x=0 are aria egală cu $\frac{29}{3}$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x - 4, x \in (-\infty, 0] \\ x - 4, x \in (0, +\infty) \end{cases}$

a)Arătați că $\int_1^4 f(x)\,dx = -\frac{9}{2}$.

b)Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și x=0 are aria egală cu $\frac{23}{3}$.

9. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$.

a)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = \frac{4}{3}$.

b)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\frac{11\pi}{5}$.

c)Determinați numărul $m \in (1,+\infty)$, știind că $\int_1^m (f(x) - x^2) \ln x\,dx = -1$.

10. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

a)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = \frac{7}{3}$.

b)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\frac{71\pi}{5}$.

c)Determinați numărul $m \in (1,+\infty)$, știind că $\int_1^m (f(x) - x^2) \ln x\,dx = 1$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Determinați numărul real a , a>1, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x}\,dx = 57 + \ln a$.

12. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x^2 + 2x + 1$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Determinați numărul real a , a>1, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x}\,dx = 28 + \ln a$.

13.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x, x \in (-\infty, 1] \\ 1 + \frac{1}{x} \cdot \ln x, x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 2$.

b)Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c)Determinați numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{n^2 - 14 + \ln^2 2}{2}$.

14.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x^2-x+2, x\in(-\infty,1]\\ 4+\frac{1}{x}\cdot\ln x, x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

a)Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 8$.

b)Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c)Determinați numărul natural n pentru care $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{n^2-12+\ln^2 2}{2}$.

15. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{e^x}$.

a)Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx = 0$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[0,+\infty)$.

c)Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{e^x}$.

a)Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx = 0$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$.

c)Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x^2+2$.

a)Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)-2)\,dx = 4$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Calculați $\int_1^e f(x)\ln x dx$.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x^2+1$.

a)Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)-1)\,dx = 4$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c)Calculați $\int_1^e f(x)\ln x dx$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-6x^2+12x+7$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x^3)\,dx = 11$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

c)Arătați că $\int_2^4 \frac{3}{f'(x)+12}dx=\frac{\pi}{8}$.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-6x^2+12x+8$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x^3)\,dx = 12$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

c)Arătați că $\int_2^4 \frac{3}{f'(x)+12}dx=\frac{\pi}{8}$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{e^x+2}$.

a)Arătați că $\int_0^2 (e^x+2)f(x)\,dx = 2$.

b)Arătați că $\int_0^2 \frac{x}{f(x)}dx = 5+e^2$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{e^x f(x)}$.

22. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{e^x+3}$.

a)Arătați că $\int_0^1 (e^x+3)f(x)\,dx = 1$.

b)Arătați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)}dx = \frac{5}{2}$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{e^x f(x)}$.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$.

a)Arătați că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x}dx=e^2(e-1)$.

b)Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=3$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2a}$.

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$.

a)Arătați că $\int_1^4 \frac{f(x)}{x}dx=e(e^3-1)$.

b)Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=4$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\int_0^2 f(x)f'(x)\,dx = 2e^{4a}$.

25.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-3x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2019$ este o primitivă a funcției f.

c)Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{61\pi}{3}$.

26.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+9x$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-9x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2+2017$ este o primitivă a funcției f.

c)Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{331\pi}{3}$.

27. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x-3$.

a)Arătați că $\int_1^2 (f(x)-2x+3)\,dx = 7$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=2018$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\int_1^a f(x)\,dx = a^3-1$.

28.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+4x-6$.

a)Arătați că $\int_1^2 (f(x)-4x+6)\,dx = 7$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2017$.

c)Determinați numărul real a pentru care $\int_1^a f(x)\,dx = a^3-1$.

29. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3-3x$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)+3x)\,dx = 1$.

b)Arătați că $\int_0^1 \left(4x^3-f(x)\right)e^x\,dx = 3$.

c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=3.

30. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3+x$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x)\,dx = 1$.

b)Arătați că $\int_0^1 \left(4x^3-f(x)\right)e^x\,dx = -1$.

c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2.

31. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 4$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 4)\,dx = 1$.

b)Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + 2018$ este o primitivă a funcției f.

c)Determinați numărul natural n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=2 are aria egală cu $n^2 - \frac{4}{3}$.

32. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 2$.

a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 2)\,dx = \frac{3}{2}$.

b)Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2019$ este o primitivă a funcției f.

c)Determinați numărul natural n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=2 are aria egală cu $n^2 - \frac{10}{3}$.

33.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + 4x)\,dx = \frac{2}{3}$.

b)Calculați $\int_0^1 e^x\left(x^2 - f(x)\right) dx$.

c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 aria egală cu $\frac{5}{3}$.

34.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x$.

a)Arătați că $\int_{-2}^2 (f(x) + 5x)\,dx = \frac{16}{3}$.

b)Calculați $\int_0^1 e^x\left(x^2 - f(x)\right) dx$.

c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 aria egală cu $\frac{13}{6}$.

35. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 + \ln x$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = x\ln x$.

a)Calculați $\int_e^{e^2} (f(x) - \ln x)\,dx$

b)Arătați că F este o primitivă a funcției f.

c)Arătați că $\int_e^{e^2} f(x)F(x)\,dx = 2e^4 - \frac{e^2}{2}$.

36. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 + \ln x$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = 1 + x\ln x$.

a)Calculați $\int_1^e (f(x) - \ln x)\,dx$

b)Arătați că F este o primitivă a funcției f.

c)Arătați că $\int_1^e f(x)F(x)\,dx = \frac{e^2+2e-1}{2}$.

37.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 27$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + 3x^2 - 9x + 27)\,dx = 0$.

b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{9x^2}{2} - 27x$ este o primitivă a funcției f.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[3,4] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x^2+9}$.

38.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 5x^2 + 25x - 125$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + 5x^2 - 25x + 125)\,dx = 0$.

b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{25x^2}{2} - 125x$ este o primitivă a funcției f.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x^2+25}$.

39. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 5x)\,dx = \frac{2}{3}$.

b)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2)e^x\,dx = 5$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{3f(x)}{x}$.

40. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x$.

a)Arătați că $\int_{-3}^3 (f(x) - 6x)\,dx = 18$.

b)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2)e^x\,dx = 6$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{3f(x)}{x}$.

41.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^4 + x + 2$.

a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - x - 2)\,dx = \frac{32}{5}$.

b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - x^4 - 2)\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.

42.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^4 + 4x + 1$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 4x - 1)\,dx = \frac{1}{5}$.

b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - x^4 - 1)\ln x\,dx = e^2 + 1$.

c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.

43.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + 2)\,dx = 0$.

b)Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx = -2e + 3$.

c)Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{6-a} (f(x) + 4)\,dx$.

44.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 4$.

a)Arătați că $\int_{-2}^2 (f(x) - 4)\,dx = 0$.

b)Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx = 4e - 3$.

c)Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{4-a} (f(x) - 8)\,dx$.

45.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^3 + 5x$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^3 - 5x)\,dx = 0$.

b)Arătați că $\int_0^2 e^x (f(x) - x^5 - x^3 + 1)\,dx = 6e^2 + 4$.

c)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

46.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^3 + 6x$.

a)Arătați că $\int_{-2}^2 (f(x) - x^5 - 6x)\,dx = 0$.

b)Arătați că $\int_0^2 e^x(f(x) - x^5 - x^3 + 2)\,dx = 8e^2 + 4$.
c)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.
47.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3$.
a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 3x^2 - 3)\,dx = 1$.
b)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2.
c)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
48.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$.
a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 6x^2 - 1)\,dx = 1$.
b)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2.
c)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
49.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$.
a)Calculați $\int_0^2 (f(x) + 3x^2 + 2x + 4)\,dx$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3 + 3x^2 + 3x - 1)e^x\,dx = 3e - 2$.
c)Demonstrați că $\int_{1-a}^{1+a} f(x)\,dx = 0$, pentru orice număr real a.
50.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.
a)Calculați $\int_0^2 (f(x) - 3x^2 + 2)\,dx$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3 - 3x^2 + x + 4)e^x\,dx = 2e - 1$.
c)Demonstrați că $\int_{-a-1}^{a-1} f(x)\,dx = 0$, pentru orice număr real a.
51. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 4x + \frac{1}{x}$.
a)Arătați că $\int_2^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = 10$.
b)Demonstrați că funcția $F:(x) \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x^2 + \ln x + 2018$ este o primitivă a funcției f.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[2,4] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - 4x$.
52. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.
a)Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{2}{x}\right) dx = 8$.
b)Demonstrați că funcția $F:(x) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + 2\ln x + 2019$ este o primitivă a funcției f.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - 2x$.
53.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 25$.
a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 25)\,dx = \frac{1}{3}$.
b)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)+26}$, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.
c)Determinați numărul real a, a>1, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+25}{x}\,dx = 12$.
54.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 36$.
a)Arătați că $\int_0^3 (f(x) + 36)\,dx = 1$.
b)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)+37}$,

axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.
c)Determinați numărul real a, a>1, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+36}{x}\,dx = 24$.
55.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4$.
a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 4)\,dx = \frac{1}{3}$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(2) = 6$.
c)Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1, are aria egală cu $5e-6$.
56. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 7$.
a)Arătați că $\int_0^3 (f(x) - 7)\,dx = 1$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0) = 2$.
c)Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1, are aria egală cu $8e-9$.
57. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3 - 5x^2$.
a)Arătați că $\int_1^2 (f(x) + 5x^2)\,dx = 15$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0) = 2019$.
c)Determinați numărul natural n,n>1, știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2}\,dx = 15$.
58. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3 + 4x^2$.
a)Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4x^2)\,dx = 15$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2020$.
c)Determinați numărul natural n,n>1, știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2}\,dx = 24$.
59.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3\sqrt{x}$.
a)Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - 3\sqrt{x}\right) dx = \frac{26}{3}$.
b)Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x\sqrt{x} + 2020$ este o primitivă a funcției f.
c)Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \left(f(x) - 3\sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2, are aria egală cu $e(2e - 1)$.
60.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$.
a)Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - 4\sqrt{x}\right) dx = \frac{26}{3}$.
b)Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 2019$ este o primitivă a funcției f.
c)Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \left(f(x) - 4\sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2, are aria egală cu $e(2e - 1)$.
61. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 + x$.
a)Calculați $\int_{-1}^1 x^3\,dx$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3)e^x\,dx = 1$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \frac{f(x)-x}{x^2}$.
62. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^5 + 2x$.
a)Calculați $\int_{-1}^1 x^5\,dx$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^5)e^x\,dx = 2$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \frac{f(x)-2x}{x^3}$.

63. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 2$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = x^2 - 2x + 4$.

a)Calculați $\int_0^1 (f(x) + 2)\, dx$.

b)Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_0^n F(x)\, dx = \frac{n^3}{3}$.

64. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = x^2 - 4x + 6$.

a)Calculați $\int_0^1 (f(x) + 4)\, dx$.

b)Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_0^n F(x)\, dx = \frac{n^3}{3}$.

65.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 4x + \frac{1}{x}$.

a)Arătați că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = 2$.

b)Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = 2x^2 + \ln x + 2$ este o primitivă a funcției f.

c)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2 are aria mai mică strict decât 7.

66.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 6x + \frac{1}{x}$.

a)Arătați că $\int_1^{e} \frac{1}{x} dx = 1$.

b)Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = 3x^2 + \ln x + 2$ este o primitivă a funcției f.

c)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2 are aria mai mică strict decât 10.

67. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+3}$.

a)Arătați că $\int_0^2 x^2\, dx = \frac{4}{3}$.

b)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.

c)Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(-3,+\infty)$.

68. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+4}$.

a)Arătați că $\int_0^4 x^2\, dx = \frac{16}{3}$.

b)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.

c)Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(-4,+\infty)$.

69. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 4$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (4x + 4)\, dx = 8$.

b)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - 4x - 4$.

c)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

70. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a)Arătați că $\int_{-1}^1 (-2x + 1)\, dx = 2$.

b)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției

$g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) + 2x - 1$.

c)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

71.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = e^x + x^2 - 1$.

a)Arătați că $\int_1^2 e^x\, dx = e^2 - e$.

b)Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)Calculați $\int_0^1 F(x)\, dx$.

72.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x - 3x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = e^x - \frac{3x^2}{2} - 1$.

a)Arătați că $\int_0^3 e^x\, dx = e^3 - 1$.

b)Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)Calculați $\int_0^1 F(x)\, dx$.

73. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 2x$.

a)Arătați că $\int_1^4 3x^2\, dx = 63$.

b)Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 2019$.

c)Determinați numărul natural $n, n\geq 2$ știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = 9$.

74. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 5x$.

a)Arătați că $\int_0^2 3x^2\, dx = 8$.

b)Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 2020$.

c)Determinați numărul natural $n, n\geq 2$ știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = \frac{75}{2}$.

75. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 5 - \frac{1}{x}$.

a)Calculați $\int_1^2 \big(5 - f(x)\big)\, dx$.

b)Determinați primitiva $F: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 5$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = xf(x)$.

76. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

a)Calculați $\int_2^3 \big(2 - f(x)\big)\, dx$.

b)Determinați primitiva $F: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1) = 2$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = xf(x)$.

77.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + 3x^2$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = e^x + x^3 + 2018$.

a)Calculați $\int_1^2 (f(x) - e^x)\, dx$.

b)Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)Calculați $\int_0^1 f(x)F(x)\, dx$.

78.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^x + 6x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = e^x + 3x^2 + 2019$.

a)Calculați $\int_1^2 (f(x) - e^x)\, dx$.

b)Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c)Calculați $\int_0^1 f(x)F(x)\, dx$.

79.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 25$.

a)Calculați $\int_1^2 f'(x)\, dx$.

b)Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2}+25\ln 2$.
c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x^2$ este egal cu 62π.
80.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 7$.
a)Calculați $\int_1^2 f'(x) dx$.
b)Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2}+7\ln 2$.
c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x^2$ este egal cu 49π.
81. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3$.
a)Verificați dacă funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x$ este o primitivă a funcției f.
b)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație x=0 și x=1.
c)Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2} + 3\ln 2$.
82. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4$.
a)Verificați dacă funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x$ este o primitivă a funcției f.
b)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație x=0 și x=1.
c)Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2} + 4\ln 2$.
83. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 4$.
a)Calculați $\int_0^1 f'(x) dx$.
b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^3 + 4x + 3$ este o primitivă a funcției f.
c)Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație x=0 și x=1.
84.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 6$.
a)Calculați $\int_0^1 f'(x) dx$.
b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^3 + 6x + 4$ este o primitivă a funcției f.
c)Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație x=0 și x=1.
85. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{x}$.
a)Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$.
b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 + 4x + \ln x$ este o primitivă a funcției f.
c)Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuație x=1 și x=2.
86. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5 + \frac{1}{x}$.
a)Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$.
b)Arătați că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 + 5x + \ln x$ este o primitivă a funcției f.
c)Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuație x=1 și x=2.
87. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.
a)Calculați $\int_3^5 xf(x) dx$.
b)Arătați că funcția $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = 2 + \ln x$ este o primitivă a funcției f.

c)Determinați numărul real a,a>5, pentru care aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație x=5 și x=a, este egală cu ln4.
88. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.
a)Calculați $\int_4^6 xf(x) dx$.
b)Arătați că funcția $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = 6 + \ln x$ este o primitivă a funcției f.
c)Determinați numărul real a,a>3, pentru care aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație x=3 și x=a, este egală cu ln5.
89. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
a)Verificați dacă funcția $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = x + \frac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f.
b)Calculați $\int_1^e x \cdot f(x^2) dx$.
c)Determinați numărul real a>1, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{4}{3}$.
90. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.
a)Verificați dacă funcția $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = 2x - \frac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f.
b)Calculați $\int_1^e x \cdot f(x^2) dx$.
c)Determinați numărul real a>1, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{27}{4}$.
91. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x + 4$.
a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^5 - 4) dx = 0$.
b)Calculați $\int_0^1 x^{2022}(f(x) - x - 4) dx$.
c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}(f(x) - x^5)$ este egal cu $\pi(8\ln 4 + 15)$.
92. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x + 5$.
a)Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - x^5 - 5) dx = 0$.
b)Calculați $\int_0^1 x^{2023}(f(x) - x - 5) dx$.
c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}(f(x) - x^5)$ este egal cu $\pi(10\ln 5 + 24)$.
93. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+4}$.
a)Arătați că $\int_0^3 (x+4)f(x) dx = e^3 - 1$.
b)Arătați că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1 - \ln\frac{5}{4}$.
c)Arătați $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 e^x \ln(x+4) dx = e\ln 5 - \ln 4$.
94. Se consideră funcția $f:(-5,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+5}$.
a)Arătați că $\int_0^2 (x+5)f(x) dx = e^2 - 1$.
b)Arătați că $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1 - \ln\frac{6}{5}$.
c)Arătați $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 e^x \ln(x+5) dx = e\ln 6 - \ln 5$.
95. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} + 3$.

a)Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care care $F(0) = 0$.
c)Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = 4 + \ln\frac{5}{2}$.
96. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} - 1$.
a)Arătați că $\int_0^1 (x^2+1)f(x)\,dx = \frac{1}{6}$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care care $F(0) = 0$.
c)Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \ln\frac{2}{5}$.
97.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$.
a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{7}{2}$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 1)\,dx = 3\ln\frac{10}{9}$.
c)Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.
98.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+9}}$.
a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+9}\,dx = -\frac{5}{2}$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 1)\,dx = -3\ln\frac{10}{9}$.
c)Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.

Teste oficiale

Testul 1(Examen de bacalaureat național2020, sesiunea II)

Subiectul I

1.Arătați că $\left(10 + \frac{1}{2}\right)\left(10 - \frac{1}{2}\right) = \frac{399}{4}$.
2.Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x) = 2x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 10 - x$.
3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2 + 13) = 2$.
4.După o ieftinire cu 20%, prețul unei tablete este 800 de lei.Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.
5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,7)$ .Punctul M este mijlocul segmentului AB.Calculați lungimea segmentului AM.
6.Arătați că $2\sin^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ = 0$.

Subiectul II

1.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0))=-2$.
b)Arătați că $A(a)\cdot A(-a) = (2 - a^2)I_2$, pentru orice număr real a, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X = A(2)$.
2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y = x^2 + xy - x - y + 1$.
a)Arătați că $3*2=11$.
b)Demonstrați că $x*(-x) = 1$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real x pentru care $2^x * 4 = 1$.

Subiectul III

1.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați imaginea funcției f.
2.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.
a)Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}$.
b)Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 1)\,dx = 2\ln\frac{5}{4}$.
c)Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.