PĂCURAR CORNEL COSMIN

MATEMATICĂ PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

Profil : ştiinţele naturii

2021

Ecuația unei drepte care trece prin două puncte

$AB: \frac{y-y_B}{y_A-y_B} = \frac{x-x_B}{x_A-x_B}$, $AB: y-y_B = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \cdot (x-x_B)$, $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ecuația unei drepte care trece printr-un punct și are o pantă dată

Dacă se știe panta dreptei d, m_d și $A(x_A, y_A) \in d \Rightarrow d: y-y_A = m_d(x-x_A)$

Fie $A(x_A, y_A)$,$B(x_B, y_B)$,$C(x_C, y_C)$

Coliniaritate

A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Aria triunghiului ABC

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie punctul $A(x_A, y_A)$ și $d: ax+by+c=0 \Rightarrow d(A,d) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Condiția ca un punct să aparțină unei drepte

$A(x_A, y_A) \in d: ax+by+c=0 \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$

Condiții de paralelism,perpendicularitate

Fie $d_1: y=m_1x+n_1$ și $d_2: y=m_2x+n_2$, atunci

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Subiectul I(prelucrări bacalaureat)

1.Determinați termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$,știind că $b_1 = 2$ și rația q=4.

2.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = -5x-7$.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația$\sqrt{5x} + x = 10$.

4.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{64}\}$, acesta să fie număr natural.

5.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$,$B(0,-3)$ și $C(6,-4)$.Determinați ecuația medianei din B a triunghiului ABC.

6.Arătați că $\sin x(6\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 6\cos x) = 6$, pentru orice număr real x.

7.Determinați termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$,știind că $b_1 = 3$ și rația q=2.

8.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2-x+7$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 6x-5$.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

9.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația$\sqrt{6x} + x = 12$.

10.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{25}\}$, acesta să fie număr natural.

11.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$,$B(-4,1)$ și $C(-3,2)$.Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC.

12.Arătați că $\sin x(7\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 7\cos x) = 7$, pentru orice număr real x.

13.Arătați că $2i + (1-i)^2 = 0$, unde $i^2 = -1$.

14.Determinați numărul real nenul m, știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 8x - 9$ este egală cu 16.
15.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(x^2 + 10x + 105) = 2$.
16.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3, \dots ,200\}$, acesta să fie număr par.
17.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(1,-1)$ și $C(4,1)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că ABCD este paralelogram.
18.Arătați că $\sin 3x - \sin 2x + \sin x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{1}{2}$.
19.Arătați că $2i - (1+i)^2 = 0$, unde $i^2 = -1$.
20.Determinați numărul real nenul m, știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 8x - 7$ este egală cu 12.
21.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 10x + 40) = 2$.
22.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3, \dots ,200\}$, acesta să fie număr impar.
23.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(0,2)$ și $C(2,5)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că ABCD este paralelogram.
24.Arătați că $\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
25.Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și rația r=3.
26.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 9x + 8$ cu axa Ox.
27.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} + 3 \cdot 5^x = 8$.
28.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 8x + 16 = 0$.
29.Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și AB=2.
30.Arătați că $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos^2(x - \pi) = 1$, pentru orice număr real x.
31.Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 3$ și rația r=2.
32.Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9x + 8$ cu axa Ox.
33.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x+1} - 3 \cdot 6^x = 3$.
34.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 10x + 25 = 0$.
35.Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și AB=2.
36.Arătați că $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2(x + \pi) = 1$, pentru orice număr real x.
37.Arătați că numărul $a=\left(\frac{2}{1+i} - \frac{2}{1-i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2 = -1$.
38.Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2 - 5x + m = 0$ sunt numere reale.
39.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$.
40.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 66 de submulțimi cu două elemente.
41.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,1)$. Determinați ecuația medianei din B a triunghiului ABC.

42.Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

43.Arătați că numărul $a=\left(\frac{2}{1+i}-\frac{2}{1-i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.

44.Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-6x+m=0$ sunt numere reale.

45.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=351$.

46.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 55 de submulțimi cu două elemente.

47.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$, $B(3,-2)$ și $C(5,2)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

48.Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

49.Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_2=3$.

50.Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)^2$ și $g(x)=2019-x$.Calculați $g(f(3))$.

51.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x=3^{x^2}$.

52.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 7.

53.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-5)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul.Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.

54.Arătați că tgx+ctgx=2 , știind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

55.Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_2=6$.

56.Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)^2$ și $g(x)=2020-x$.Calculați $g(f(1))$.

57.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x=2^{x^2}$.

58.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă cifra zecilor egală cu 6.

59.În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-3)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul.Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.

60.Arătați că $\text{tg}x+\text{ctg}x=\frac{3}{\sqrt{2}}$, știind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

61.Arătați că $3+i+(i-2)(2+i)-(i-2)=0$, unde $i^2=-1$.

62.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+4$.Calculați $(f\circ f)(-2)$.

63.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-7x+12)=\log_3 6$.

64.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale impare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

65.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,5)$,$B(0,3)$,$C(6,5)$ și $D(10,7)$.Demonstrați că patrulaterul ABCD este paralelogram.

66.Arătați că $\sin x+5\cos x=3\sqrt{2}$, știind că ctgx= 1 și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

67.Arătați că $5+i+(i-3)(3+i)-(i-5)=0$, unde $i^2=-1$.

68.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+4$.Calculați $(f\circ f)(2)$.

69.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-8x+12)=\log_3 5$.

70.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

71.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$,$B(-2,2)$,$C(4,4)$ și $D(8,6)$.Demonstrați că patrulaterul ABCD este paralelogram.

72.Arătați că $\sin x+7\cos x=4\sqrt{2}$, știind că $tgx=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
73.Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=5$ și $a_3=15$.
74.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$.Determinați numerele naturale n, pentru care $f(n)<4$.
75.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-9}=x+3$.
76.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.
77.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{2}+5$ și d_2:$y=(m-2)x+3$, unde m este număr real.Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
78.Arătați că, dacă $\sin 2x=\frac{1}{3}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{4}{3}$.
79.Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=8$ și $a_3=14$.
80.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$.Determinați numerele naturale n, pentru care $f(n)<9$.
81.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-25}=x+5$.
82.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
83.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{3}+3$ și d_2:$y=(m-3)x+1$, unde m este număr real.Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
84.Arătați că, dacă $\sin 2x=\frac{2}{5}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{7}{5}$.
85.Arătați că $\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{24}=0$.
86.Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.
87.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+9}=3-\sqrt{x}$.
88.Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,5,6\}$.
89.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+4$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinați numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
90.Arătați că $\sin(2\pi-x)\cos(\pi-x)+\sin(\pi-x)\cos(2\pi-x)=-\sin 2x$, pentru orice număr real x.
91.Arătați că $\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)-\sqrt{48}=0$.
92.Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.
93.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+25}=5-\sqrt{x}$.
94.Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.
95.În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+5$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{6}+1$. Determinați numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
96.Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi-x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.
97.Arătați că suma elementelor mulțimii $\{n\in\mathbb{N} \mid n(n+1)<14\}$ este egală cu 6.
98.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=ax+b$.Determinați numerele reale a și b, știind că $f(0)=1$ și $f(x+1)=f(x)+5$, pentru orice număr real x.
99.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația$(x+3)^2-16>0$.
100.Determinați numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7,8,9\}$.
101.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,4)$, $B(5,2)$ și $C(-1,4)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC.

102.Calculați sinusul unghiului D al triunghiului DEF, știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 12, DE=10 și DF=8.
103.Arătați că suma elementelor mulțimii $\{n\in\mathbb{N} \mid n(n+2) < 16\}$ este egală cu 6.
104.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = ax + b$.Determinați numerele reale a și b, știind că $f(0) = 1$ și $f(x+1) = f(x) + 6$, pentru orice număr real x.
105.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(x+2)^2 - 9 > 0$.
106.Determinați numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1,3,5,6,7,9\}$.
107.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1,2)$, $B(3,5)$ și $C(-3,7)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC.
108.Calculați sinusul unghiului D al triunghiului DEF, știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 12, DE=8 și DF=10.
109.Determinați conjugatul numărului complex $z=(3-i)(1+i)+4i$.
110.Determinați numerele naturale n pentru care $n^2 + n - 30 < 0$.
111.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+4) = 2\lg(x-2)$.
112.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 28 de submulțimi cu două elemente.
113.Se consideră dreptunghiul ABCD și $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 18, determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
114.Arătați că, dacă x este număr real pentru care sinx+cosx=$\frac{\sqrt{10}}{3}$, atunci tgx+ctgx=18.
115.Determinați conjugatul numărului complex $z=(1-i)(3+i)+6i$.
116.Determinați numerele naturale n pentru care $n^2 + n - 6 < 0$.
117.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+2) = 2\lg(x-4)$.
118.Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 15 de submulțimi cu două elemente.
119.Se consideră dreptunghiul ABCD și $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 40, determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
120.Arătați că, dacă x este număr real pentru care sinx+cosx=$\frac{\sqrt{7}}{2}$, atunci tgx+ctgx=$\frac{8}{3}$.
121.Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_3 = 12$ și rația r=5.
122.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 3m$.
123.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $64^x + \frac{7}{64} = \frac{1}{8}$.
124.Determinați câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{2,3,4,5\}$.
125.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,2)$ și $B(2,6)$.Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.
126.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=12 și AC=5.
127.Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_4 = 10$ și rația r=3.
128.Determinați numărul real m, știind că punctul $A(2,10)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 5m$.
129.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}$.
130.Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

131.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ și $B(6,4)$.Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

132.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele AB=24 și AC=10.

133.Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$,știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 6$.

134.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 1 = 0$.Arătați că $3x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.

135.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$.

136.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre ,acesta să fie multiplu de 12.

137.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$,$B(1,a)$ și $C(3,2)$,unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctele A,B și C sunt coliniare.

138.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$4\sqrt{2}$,AC=8 și sinC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.Calculați sinB.

139.Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$,știind că $a_1 = 5$ și $a_2 = 7$.

140.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 4x + 1 = 0$.Arătați că $4x_1x_2 + (x_1 + x_2) = 0$.

141.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{2x+1} = \frac{1}{8}$.

142.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre ,acesta să fie divizibil cu 15.

143.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-1)$,$B(1,1)$ și $C(-3,a)$,unde a este număr real.Determinați numărul real a, știind că punctele A,B și C sunt coliniare.

144.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$\sqrt{3}$,AC=$4\sqrt{3}$ și sinB=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.Calculați sinC.

145.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 4i$ și $z_2 = 3 - 4i$.Arătați că numărul $z_1 + z_2$este real.

146.Determinați numărul real m,știind că punctul $M(2,m)$ aparţină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5$.

147.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x-5} = 2^{-2}$.

148.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A=$\{1,2,3,\dots,40\}$,acesta să fie multiplu de 5.

149.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,6)$,$B(2,4)$ și $C(m,2)$, unde m este număr real.Determinați numărul real m,știind că punctul C aparţine dreptei AB.

150.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$,unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

151.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ și $z_2 = 3 + 2i$.Arătați că numărul $z_1 \cdot z_2$este real.

152.Determinați numărul real m,știind că punctul $M(3,m)$ aparţină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8$.

153.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{4x-6} = 3^{-2}$.

154.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A=$\{1,2,3,\dots,30\}$,acesta să fie divizibil cu 5.

155.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$,$B(1,3)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real.Determinați numărul real m,știind că punctul C aparţine dreptei AB.

156.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$,unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

157.Se consideră numărul complex z=2−i.Arătați că $z^2 + 4i = 3$.

158.Calculați $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2016$ și $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x + 2016$.

159.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-5x} = 3^{x-9}$.

160.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={0,1,2,3, … ,90},acesta să fie pătrat perfect.
161.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,2).Determinați ecuația dreptei d, care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta de ecuație y=2x−10.
162.Determinați aria triunghiului ABC,știind că AB=6,AC=$4\sqrt{3}$ și A=$\frac{\pi}{3}$.
163.Se consideră numărul complex z=2−2i.Arătați că $z^2+8i=0$.
164.Calculați $(f\circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x+2020$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=x-2020$.
165.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-3x}=2^{x-4}$.
166.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3, … ,121},acesta să fie pătrat perfect.
167.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(2,1).Determinați ecuația dreptei d, care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta de ecuație y=x−12.
168.Determinați aria triunghiului ABC,știind că AB=6,BC=4 și B=$\frac{\pi}{6}$.
169.Determinați numărul complex z,știind că $2z+\bar{z}=6+3i$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
170.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=2x-3$.Calculați $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$.
171.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+4)=1+\log_2(x+1)$.
172.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele identice.
173.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(2,2) și B(5,5).Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul C(−3,5) și este perpendiculară pe dreapta AB.
174.Se consideră triunghiul ABC cu AB=$6\sqrt{2}$,$m(\sphericalangle ACB)=30°$ și $m(\sphericalangle BAC)=45°$.Determinați lungimea laturii BC.
175.Determinați numărul complex z,știind că $2z-\bar{z}=2+9i$,unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
176.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=2x+3$.Calculați $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$.
177.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+3)=1+\log_3(x+1)$.
178.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele diferite.
179.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,1) și B(4,4).Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul C(−1,3) și este perpendiculară pe dreapta AB.
180.Se consideră triunghiul ABC cu AC=$4\sqrt{2}$,$m(\sphericalangle ACB)=45°$ și $m(\sphericalangle BAC)=30°$.Determinați lungimea laturii BC.
181.Se consideră numărul complex $z=2-2i$.Arătați că $z^2=-8i$.
182.Calculați $(g\circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x+2019$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=x-2019$.
183.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-5x}=5^{x-9}$.
184.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3, … ,90},acesta să fie pătrat perfect.
185.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,2).Determinați ecuația dreptei d,care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație y=4x−2019.
186.Determinați aria triunghiului ABC,știind că AB=6,BC=4 și B = $\frac{\pi}{6}$.
187.Se consideră numărul complex $z=2+2i$.Arătați că $z^2=8i$.
188.Calculați $(g\circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x-2020$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=x+2020$.
189.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+5x}=2^{x-4}$.
190.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3, … ,130},acesta să fie pătrat perfect.

191.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$.Determinați ecuația dreptei d,care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x+2020$.
192.Determinați aria triunghiului ABC,știind că $AC=6$,$BC=4\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.
193.Arătați că $(\sqrt{5}+3)^2-6\sqrt{5}=14$.
194.Determinați numărul real m,știind că $M(m,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+6$.
195.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+10)=\log_3 26$.
196.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,acesta să fie divizibil cu 3.
197.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-8\vec{j}$ sunt coliniari.
198.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{1}{2}$,arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
199.Arătați că $(\sqrt{6}-2)^2+4\sqrt{6}=10$.
200.Determinați numărul real m,știind că $M(m,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.
201.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+4)=\log_2 40$.
202.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,acesta să fie divizibil cu 4.
203.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+6\vec{j}$ sunt coliniari.
204.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
205.Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=6$ și rația $q=3$.
206.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-6x$.
207.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x+1)=\log_3 4$.
208.Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
209.Determinați numărul real m,știind că punctul $M(2,0)$ aparține dreptei de ecuație $y=mx-4$.
210.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care $BC=\sqrt{3}$ și $A=\frac{\pi}{3}$.
211.Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=8$ și rația $q=2$.
212.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+4x$.
213.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x-1)=\log_2 5$.
214.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.
215.Determinați numărul real m,știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y=mx+3$.
216.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care $AB=3\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.
217.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,știind că $b_2=27$ și $b_3=81$.
218.Determinați valoarea maximă a funcției $f:[2,4]\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-2$.
219.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+20}=x+4$.
220.Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
221.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(0,1)$.Determinați ecuația dreptei AB.
222.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AC=8$ și $B=\frac{\pi}{6}$.
223.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$,știind că $b_4=24$ și $b_5=72$.
224.Determinați valoarea minimă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$,$f(x)=x-3$.
225.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+27}=x+3$.
226.Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.
227.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$ și $B(1,4)$.Determinați ecuația dreptei AB.
228.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $BC=6$ și $A=\frac{\pi}{3}$.

229.Se consideră numărul complex $z = 3+3i$.Arătați că $z^2 - 18i = 0$.
230.Calculați $(g \circ f)(2)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x + 2018$.
231.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-5x} = 3^{3-3x}$.
232.Aflați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
233. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$.Determinați ecuația dreptei d,care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x+9$.
234.Determinați aria triunghiului MNP,știind că$MN=12, MP=3\sqrt{3}$ și $m(\sphericalangle M) = 60°$.
235.Se consideră numărul complex $z = 2+i$.Arătați că $z^2 - 3 - 4i = 0$.
236.Calculați $(g \circ f)(-4)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x + 2020$.
237.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-6x} = 2^{4-3x}$.
238.Aflați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
239. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,5)$.Determinați ecuația dreptei d,care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+8$.
240.Determinați aria triunghiului MNP,știind că$PN=12, MP=8$ și $m(\sphericalangle P) = 30°$.
241.Calculați $(3 - 4i)(5 + 4i)$,unde $i^2 = -1$.
242.Calculați $f(f(3))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$.
243.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 + 14) = \log_5 50$.
244.Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 6.
245. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,a)$, $B(4,2)$ și $C(3,1)$.Determinați numărul real a pentru care punctele A,B și C sunt coliniare.
246.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.
247.Calculați $(2 + 3i)(5 - 3i)$,unde $i^2 = -1$.
248.Calculați $f(f(2))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.
249.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 3) = \log_2 28$.
250.Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
251. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a, 1)$, $B(3,2)$ și $C(2,5)$.Determinați numărul real a pentru care punctele A,B și C sunt coliniare.
252.Se consideră $E(x) = \sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{2}$, unde x este un număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.
253.Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_4 = 16$ și $a_5 = 20$.
254.Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 8$.
255.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 5} = x + 1$.
256.Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.
257. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ și $B(1,3)$.Determinați ecuația dreptei AB.
258.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=10$ și $C=\frac{\pi}{6}$.
259.Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_5 = 10$ și $a_6 = 12$.
260.Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 25$.
261.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 11} = x + 1$.
262.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
263. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(0,4)$.Determinați ecuația dreptei AB.
264.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $BC=8\sqrt{3}$ și $A=\frac{\pi}{3}$.

265.Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 2$ și rația $r = 3$.
266.Determinați numărul real m știind că punctul $A(m, 0)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 6$.
267.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 6) = \log_3 10$.
268.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie divizibil cu 3.
269.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 1)\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
270.Arătați că sin2x=1,știind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
271.Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 1$ și rația $r = 4$.
272.Determinați numărul real m știind că punctul $A(m, 0)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$.
273.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 3) = \log_2 19$.
274.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M={1,2,3,4,5,6,7,8}, acesta să fie divizibil cu 4.
275.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 2)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sunt coliniari.
276.Arătați că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,știind că $\cos x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
277.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 4 - i$.Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.
278.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(2,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
279.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + 3x - 12} = x$.
280.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,90} acesta să fie divizibil cu 8.
281.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,3)$ și $B(3, a)$.Determinați numărul real a,știind că punctele O,A și B sunt coliniare.
282.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$,unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
283.Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 3 - 2i$.Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.
284.Determinați numărul real a,știind că punctul $A(3,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
285.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 4} = x$.
286.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,80} acesta să fie divizibil cu 6.
287.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$,$A(1,4)$ și $B(4, a)$.Determinați numărul real a,știind că punctele O,A și B sunt coliniare.
288.Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin x$,unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.
289.Fie z=2+i.Arătați că $z^2 - 3 - 4i = 0$.
290.Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 4, g(x) = x + 2016$.Calculați $(f \circ g)(2)$.
291.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x^2 - 4x} = 6^{2-x}$.
292.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii {1,2,3,4,5}.
293.Se cosideră punctul A(1,3).Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație y=2x+7.
294.Determinați aria triunghiului MNP,știind că MN=8,NP=6 și $m(\hat{N}) = 60°$.
295.Calculați $(3 - 4i)(3 + 4i)$, unde $i^2 = -1$.

296.Calculați $f(f(2))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.
297.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 13) = \log_4 62$.
298.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 6.
299.Se consideră punctele $A(3, a)$, $B(2,4)$ și $C(8,5)$.Aflați a din mulțimea numerelor reale pentru care A,B,C sunt coliniare.
300.Fie $E(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.
301.Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,știind că $a_4 = 8$ și $a_5 = 10$.
302.Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 25$.
303.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 4} = x + 3$.
304.Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7,9\}$.
305.Fie $A(3,2)$, $B(2,3)$.Scrieți ecuația dreptei AB.
306.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=10 și $C=\frac{\pi}{3}$.
307.Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,știind că $a_1 = 3$ și rația r=4.
308.Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(m, 0)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 3$.
309.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 9) = \log_3 25$.
310.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizibil cu 4.
311.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 2)\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt coliniari.
312.Arătați că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,știind că cosx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
313.Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 4 - i$.Arătați că numărul $z_1 \cdot z_2$este real.
314. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(3,3)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$.
315. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + 3x - 5} = x$.
316. Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,90} acesta să fie divizibil cu 8.
317.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ $A(3,1)$ și $B(a, 4)$ .Determinați numărul a din mulțimea numerelor reale pentru care O,A și B sunt coliniare.
318.Se consideră $E(x) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.
319.Determinați numărul real care are partea întreagă -3 și partea fracționară 0,63.
320.Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 6$ cu axa Ox și,respectiv axa Oy.
321.Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$,știind că $a_1 = 1$ și rația r=2.
322.Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(m, 4)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + 6$.
323.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 5) = \log_3 9$.
324.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}acesta să fie divizibil cu 9.
325.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a + 2)\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.
326.Arătați că sin2x=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,știind că sinx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
327.Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + i$ și $z_2 = 5 - i$.Arătați că numărul $z_1 \cdot z_2$este real.

328. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2,2)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + a$.
329.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + 5x - 6} = x$.
330.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3, \dots ,70\}$acesta să fie divizibil cu 7.
331.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ $A(2,3)$ și $B(4, a)$ .Determinați numărul a din mulțimea numerelor reale pentru care O,A și B sunt coliniare.
332.Se consideră $E(x) = \sin x - \cos\frac{x}{2}$.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
333.Determinați numărul real care are partea întreagă -5 și partea fracționară 0,87.
334.Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$cu axa Ox și,respectiv axa Oy.
335.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+8} = 64$.
336.Aflați numărul natural n pentru care $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 128$.
337.Se consideră punctele $A(-3,2)$, $B(1,2)$ și $C(1,6)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
338.Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC,știind că AB=3,AC=4 și BC=5.
339.Calculați a_{2016},știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 2016$ și rația $r=-1$.
340. Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(3, -2)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - (3m + 2)x + 5$.
341.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{6}$.
342. Calculați probabilitatea ca,alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3, \dots ,10\}$ aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.
343. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(5,7)$ și $C(3, -5)$ .Determinați coordonatele punctului B,știind că patrulaterul OABC este paralelogram.
344.Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AB=4\sqrt{3}$ și BD=8.Calculați aria triunghiului ABC.
345.Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu primul termen $a_1 = 4$ și rația r=3.
346.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 3$.
347.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$.
348.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.
349.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+7} = 64$.
350.Aflați numărul natural n pentru care $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 256$.
351.Se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,4)$ și $C(3,1)$.Arătați că triunghiul ABC este isoscel.
352.Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC,știind că AB=12,AC=16 și BC=20.
353.Calculați a_{2017},știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 2017$ și rația $r=-1$.
354. Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $A(3, -2)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - (3m + 1)x + 4$.
355.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 5} = \sqrt{10}$.
356. Calculați probabilitatea ca,alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3, \dots ,9\}$ aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.

357.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,-3)$ și $C(2,4)$ .Determinați coordonatele punctului B,știind că patrulaterul OABC este paralelogram.
358.Se consideră dreptunghiul ABCD cu AB=32 și BD=5.Calculați aria triunghiului ABC.
359.Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu primul termen $a_1 = 5$ și rația $r=-3$.
360.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 4$.
361.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 10x + 29} = 2$.
362.Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.
363.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(1,-2)$ și $C(5,-2)$. Determinați lungimea vectorului $\vec{AM}$,știind că M este mijlocul segmentului BC.
364.Calculați ctga,știind că $\sin a = \frac{2}{3}$ și $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
365.Determinați partea reală a numărului complex $z=5+3(3-i)$.
366.Arătați că $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 23$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x - 10 = 0$.
367.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + x + 4} = 2$.
368.Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{3,4,5\}$.
369.Determinați numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y=(a-2)x+3$ și $y=4x-5$ sunt paralele.
370.Determinați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=9,AC=12 și BC=15.
371.Se consideră numărul complex $z=3+i$.Calculați z^2.
372. Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $M(m,3)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 4$.
373. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x-4) = 2$.
374.Determinați numărul submulțimilor cu un număr impar de elemente al mulțimii $A=\{0,2,4,6\}$.
375.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii AD.Arătați că $\vec{BM} + \vec{CM} = 2\vec{CD}$.
376.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A.Arătați că cosBsinC+cosCsinB=1.
377.Se consideră numărul complex $z=2-3i$.Calculați z^2.
378.Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 10x + 25$.
379.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-3,2)$ și $C(-3,6)$ .Determinați lungimea vectorului $\vec{AM}$,știind că M este mijlocul segmentului BC.
380.Calculați ctga,știind că $\sin a = \frac{3}{4}$ și $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
381.Determinați partea reală a numărului complex $z=4+3(1-i)$.
382.Arătați că $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 31$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 9 = 0$.
383.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 2x + 9} = 3$.
384.Determinați câte numere naturale pare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{3,4,5\}$.
385.Determinați numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y=(a-3)x+2$ și $y=3x+6$ sunt paralele.
386.Determinați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care AB=15,AC=20 și BC=25.

387.Se consideră numărul complex z=3+2i.Calculați z^2.
388. Determinați valoarea numărului real m pentru care punctul $M(m,2)$,aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$.
389.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x-2)=3$.
390.Determinați numărul submulțimilor cu un număr impar de elemente al mulțimii A={1,2,3,4,5}.
391.În dreptunghiul ABCD se notează cu M mijlocul laturii CD.Arătați că $\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{DA}$.
392.Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B.Arătați că sinAcosC+sinCcosA=1.
393.Se consideră numărul complex z=3+2i.Calculați z^2.
394.Calculați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-12x+36$.
395. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{10}(x^2+6)=1$.
396.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 12.
397.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0)$, $B(3,0)$ și $C(0,2)$.Calculați aria triunghiului ABC.
398.Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\cos\frac{x}{2}$.Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
399.Determinați numărul real x pentru care numerele 3,x+3 și 12 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
400.Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x-7$.
401.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-3x)=4$.
402.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie impar.
403.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-3)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ sunt opuși.
404.Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care AB=5,AC=4 și BC=7.
405.Determinați conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.
406.Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+6x-11$.
407.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5-\sqrt{x^2+4}=x$.
408.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele egale.
409.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(5,1)$ și $C(3,1)$.Calculați aria triunghiului ABC.
410.Arătați că $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.
411.Determinați rația unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali,știind că $b_3=1$ și $b_6=27$.
412.Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5x+6$.
413.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_4(x-3)=\log_4(x-1)$.
414.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,50},acesta să fie divizibil cu 13.
415.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+(a+2)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
416.Rezolvați în $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuația $2\sin x-\sqrt{3}=0$.
417.Arătați că numărul $x=3(1+i)-3i$ este real.
418.Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(6)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$.
419.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+2}=x+2$.
420.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 7.

421.Se consideră vectorii $\vec{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AC}$.
422.Se consideră expresia $E(x) = \cos x - \sin\frac{x}{2}$.Calculați $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
423.Arătați că numărul $n=\sqrt{27} - 3\left(\sqrt{3} - 4\right)$ este natural.
424. Calculați $(f \circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$.
425.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(5,1)$ și $C(3,1)$.Calculați aria triunghiului ABC.
426. Arătați că $(\sin x - 2\cos x)^2 + (2\sin x + \cos x)^2 = 5$, pentru orice număr real x.
427.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} = 25$.
428.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3, \dots ,20\}$,acesta să fie multiplu de 8.
429. Se consideră vectorii $\vec{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{BC} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AC}$.
430.Aflați valoarea lui $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{4\sin x - 3\cos x}{\cos x} = 1$.
431.Arătați că numărul $n=3\left(\sqrt{5} + 1\right) - \sqrt{45}$ este natural.
432.Calculați $f(1) + f(2) + \cdots + f(11)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.
433.Calculați lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC=12.
434.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 2)\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ sunt opuși.
435.După o ieftinire cu 30% prețul unui produs scade cu 300 de lei.Calculați prețul produsului după ieftinire.
436.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 2) = \log_3 9$.
437.Arătați că numărul $a=6(3 + 4i) - 4(1 + 6i)$ este real.
438. Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 + 12x + 36$.
439. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(x^2 + 2x + 3) = \log_6(x + 4)$.
440. După o ieftinire cu 20% prețul unui produs scade cu 80 de lei.Calculați prețul produsului înainte de ieftinire.
441.Se consideră dreapta h de ecuație $y=x-2$ și punctul $A(3,3)$.Determinați ecuația dreptei ce trece prin A și este paralelă cu dreapta h.
442.Calculați cosinusul unghiului A în triunghiul ABC în care AB=9,AC=7 și BC=8.
443.Se consideră numărul complex $z=3+4i$.Calculați z^2.
444.Se consideră numărul complex $z=3-2i$.Calculați z^2.
445.Se consideră numărul complex $z=4-3i$.Calculați $\bar{z}\cdot z$.
446.Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 + 6x + 9$.
447.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(x^2 + 4) = 1$.
448.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 15.
449.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ și $C(0,4)$.Calculați aria triunghiului ABC.
450.Se consideră expresia $E(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$.Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
451.Aflați valoarea lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $2, x+1$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
452.Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2 - 4x - 20$.
453.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 8x) = 2$.

454. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să fie divizibil cu 2.
455.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-5)\vec{i} - 6\vec{j}$ și $\vec{v} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt opuși.
456.Calculați cosinusul unghiului B al triunghiului ABC în care AB=7,AC=6 și BC=8.
457.Determinați conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9$.
458.Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+8x-7$.
459.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4-\sqrt{x^2+4} = x$.
460.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă cifrele diferite.
461.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,6), B(5,2) și C(3,4).Calculați aria triunghiului ABC.
462.Arătați că $(3\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + 3\cos x)^2 = 10$, pentru orice număr real x.
463.Determinați rația unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$cu termeni reali,știind că $b_3 = 2$ și $b_6 = 16$.
464.Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2+3x+6$.
465.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_4(x-3) = \log_4(x-1)$.
466.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,50},acesta să fie divizibil cu 14.
467.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari.
468.Rezolvați în $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuația $2\sin x-\sqrt{2} = 0$.
469.Arătați că numărul $x=3(1-i)+3i$ este real.
470.Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot \ldots \cdot f(7)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x-4$.
471.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+9} = x+3$.
472.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
473.Se consideră vectorii $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{BC} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AC}$.
474.Se consideră expresia $E(x) = \cos x - \sin x$ .Calculați $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
475.Arătați că numărul $n=\sqrt{8} - 2(\sqrt{2}-4)$ este natural.
476.Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x-1$.
477.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+3) = \log_3 7$.
478.Aflați modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
479.Se consideră punctele A(3,1) și B(5,7).Aflați lungimea vectorului $\vec{AB}$.
480.După o ieftinire cu 15% prețul unui produs scade cu 300 de lei.Calculați prețul produsului după ieftinire.
481.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ sunt opuși.
482.Determinați lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC=12.
483.Arătați că numărul $n=3(\sqrt{7}+1) - \sqrt{63}$ este natural.
484.Calculați $f(1) + f(2) + \cdots + f(11)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 4x-2$.
485.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x+1} = 36$.
486.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A={1,2,3, … ,20} acesta să fie multiplu de 9.
487.Se consideră vectorii $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j}$.Determinați lungimea vectorului $\vec{AC}$.
488.Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{5\sin x-4\cos x}{\cos x} = 1$.

489.Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\frac{6\cos x-5\sin x}{\sin x}=1$.
490.Arătați că numărul $a=6(3+4i)-4(2+6i)$ este real.
491.Aflați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$ cu axele de coordonate.
492.După o ieftinire cu 20% prețul unui produs scade cu 800 de lei.Calculați prețul produsului după ieftinire.
493.Se consideră dreapta $h: y=2x-3$ și punctul $A(4,5)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și e paralelă cu h.
494.Se consideră dreapta $h: y=2x-3$ și punctul $A(4,5)$.Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și e perpendiculară pe h.
495.Calculați cosinusul unghiului C al triunghiului ABC în care AB=6,BC=7 și AC=5.
496.Determinați aria triunghiului ABC,în care AB=4,BC=8 și $B=\frac{\pi}{3}$.
497.Arătați că numărul $x=5(1-i)+5i$ este real.
498.Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+4$ cu axa Ox.
499.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x-2}=32$.
500.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\dots,30\}$ acesta să fie divizibil cu 6.
501.Fie $A(4,3)$, $B(5,2)$ și $C(6,3)$.Calculați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
502. Fie $A(4,3)$, $B(5,2)$ și $C(6,3)$.Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC.
503.Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că AC=6,$A=\frac{\pi}{6}$ și $B=\frac{\pi}{3}$.
504.Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ știind că $a_1=3$ și $a_2=1$.
505.Aflați valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care $x^2-4x-m>0$,pentru orice număr real x.
506.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1)+\log_3 x=\log_3 12$.
507. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre,acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 5.
508.Calculați $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dacă $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$ și unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura egală cu $\frac{\pi}{4}$.
509.Se consideră punctele $A(2,4)$, $B(1,2)$ și $C(4,2)$.Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.
510. Se consideră punctele $A(2,4)$, $B(1,2)$ și $C(4,2)$.Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.
511.Se cosideră numerele complexe $z_1=5+i$ și $z_2=5-i$,arătați că numărul z_1+z_2 este real.
512.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3-5x+4}=x$.
513.Se consideră expresia $E(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos x$.Calculați $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
514.Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$,știind că $b_5=48$ și $b_8=-384$.
515.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2+7x+6$.Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
516.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $32^x=16\cdot2^{-x}$.
517.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-7n+12=0$.
518.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

519.Arătați că $(2\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2 + 4\sin 2x = 5$,pentru orice număr real x.
520.Se consideră numărul complex $z = 2-2i$.Arătați că $z^2 = -8i$.
521.Calculați $(g \circ f)(0)$,unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2018$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x + 2018$.
522.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-6x} = 5^{x-12}$.
523.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3, … ,200},acesta să fie pătrat perfect.
524.În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(0,1).Determinați ecuația dreptei d,care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -3x+2017$.
525.Determinați aria triunghiului ABC,știind că $AB=5\sqrt{3}$,AC=4 și $A = \frac{\pi}{6}$.
526.Arătați că $(\sqrt{5} - 3)^2 + 6\sqrt{5} = 14$.
527.Determinați numărul real m,știind că M(m, 7) aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 7$.
528.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(x^2 + 36) = \log_6 100$.
529.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea M={1,2,3, … ,20},acesta să fie divizibil cu 7.
530.Determinați numărul real a,pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 2)\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ sunt coliniari.
531.Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{1}{2}$,arătați că $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.
532.Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_1 = 2$ și rația q=6.
533.Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$.
534.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(5x - 10) = \log_5 5$.
535.Determinați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii {0,1,2,3,4,5}.
536.Determinați numărul real m,știind că punctul M(2,0) aparține dreptei de ecuație $y = mx-4$.
537.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC,în care $BC=3\sqrt{2}$ și $A = \frac{\pi}{4}$.
538.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$,știind că $b_2 = 5$ și $b_3 = 15$.
539.Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$.
540.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 11} = x + 1$.
541.Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.
542.În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(3,2) și B(1,4).Determinați ecuația dreptei AB.
543.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AB=4 și $C=\frac{\pi}{4}$.
544.Determinați valoarea minimă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x) = x - 2$.
545.Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care AC=6 și $B=\frac{\pi}{6}$.
546.Arătați că $(0,4 \cdot 10 - 1)(0,4 \cdot 10 + 1) = 15$.
547.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + m = 0$,unde m este număr real.Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1 + x_2) = 20$.
548.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{5 - x} = \sqrt{x + 15}$.
549.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor natural de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 4 mai mare decât cifra unităților.
550.Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a - 2)\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ sunt coliniari.
551.Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x=-\cos x$, atunci $\cos 2x=0$.
552.Arătați că $(0,5 \cdot 10 + 1)(0,5 \cdot 10 - 1) = 24$.
553.Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 6x - m = 0$,unde m este număr real.Determinați

numărul real m pentru care $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 30$.

554.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{6-x} = \sqrt{x+14}$.

555.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor natural de două cifre, acesta să aibă cifra unităților cu 4 mai mare decât cifra zecilor.

556.Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.

557.Arătați că, dacă x este număr real pentru care $-\cos x = \sin x$, atunci $\cos 2x = 0$.

558.Arătați că $\log_2 6 + \log_2 3 - \log_2 9 = 1$.

559.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -6x - 9$.Demonstrați că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x.

560.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 32} = -3x$.

561.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 + 4x + 3 = 0$.

562.Determinați numerele reale a și b, pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = 6\vec{i} - a\vec{j}$ și $\vec{v} = b\vec{i} + 2\vec{j}$.

563.Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\cos x + \sin x) - 2$, unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

564.Arătați că $\log_2 21 - \log_2 6 - \log_2 7 = 1$.

565.Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 4$.Demonstrați că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x.

566.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 12} = -2x$.

567.Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 4x + 3 = 0$.

568.Determinați numerele reale a și b, pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} - b\vec{j}$.

569.Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\cos x + \sin x) - 2$, unde x este număr real.Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

570.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1 = 2$ și rația r=4.Calculați a_3 .

571.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2) = 51$.

572.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2} + 3^{2x} = 10$.

573.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$acesta să fie divizor al lui 60.

574.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătați că $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PD} + \vec{PB}$.

575.Arătați că $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

576.Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1 = 4$ și rația r=2.Calculați a_3 .

577.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2) = 33$.

578.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x+3} + 2^{3x} = 9$.

579.Calculați probabilitatea ca,alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$acesta să fie divizor al lui 70.

580.Se consideră un punct P în planul paralelogramului ABCD.Arătați că $\vec{PC} + \vec{PA} = \vec{PB} + \vec{PD}$.

581.Arătați că $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

582.Determinați primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_2 = 4$ și $a_3 = 7$.

583.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3$.Determinați numărul natural n pentru care $f(n) = 13$.

584.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 36} = x - 2$.

585.Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

586.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$,$N(4,4)$,$P(4,5)$ și $Q(a,2)$,unde a este număr real.Determinați numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN și PQ.

587.Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AC=6 și $\cos C=\frac{1}{2}$.

588.Determinați primul termen al progresiei aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=3$ și $a_3=5$.

589.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3$.Determinați numărul natural n pentru care $f(n)=6$.

590.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-64}=x-4$.

591.Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

592.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$,$N(4,4)$,$P(5,4)$ și $Q(2,a)$,unde a este număr real.Determinați numărul real a, pentru care patrulaterul MNPQ este trapez cu bazele MN și PQ.

593.Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care AB=6 și $\cos B=\frac{1}{2}$.

Matrice ,determinanți,sisteme de ecuații liniare

Matrice patratice de ordin doi

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și α

$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{pmatrix}$

$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

Sisteme liniare de două ecuații cu două necunoscute,regula lui Cramer

$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$

$d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$

$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \end{cases}$

Matrice inversabile

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d=d$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot c=-c$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot b=-b$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot a=a$

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci

$A\cdot X=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$, $X\cdot A=B \Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Matrice patratice de ordin trei

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}$ și α

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+bfg-(gec+afh+bdi)$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+u & e+v & f+t \\ g+p & h+r & i+s \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-x & b-y & c-z \\ d-u & e-v & f-t \\ g-p & h-r & i-s \end{pmatrix}$$

$$\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h & \alpha i \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & t \\ p & r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bu+cp & ay+bv+cr & az+bt+cs \\ dx+eu+fp & dy+ev+fr & dz+et+fs \\ gx+hu+ip & gy+hv+ir & gz+ht+is \end{pmatrix}$$

Sisteme liniare de trei ecuații cu trei necunoscute,regula lui Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pentru $d=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{32}a_{23})\neq 0$$

$$d_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-(b_3a_{22}a_{13}+b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{12}a_{33})$$

$$d_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-(a_{31}b_2a_{13}+a_{21}b_1a_{33}+a_{11}b_3a_{23})$$

$$d_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{12}a_{31}b_2-(a_{31}a_{22}b_1+a_{11}a_{32}b_2+a_{21}a_{12}b_3)$$

$$\begin{cases} x=\frac{d_x}{d} \\ y=\frac{d_y}{d} \\ z=\frac{d_z}{d} \end{cases}$$

Matrice inversabile

Fie A=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$, $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_3$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dacă A este inversabilă ,atunci
$A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$, $X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Subiectul II1 (prelucrări bacalaureat)

1.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 5 \\ -5 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-1)) = 26$.
b)Demonstrați că $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$,pentru orice număr real a.
c)Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-14)$.

2.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-1)) = 26$.
b)Demonstrați că $A(2020 - a) + A(2020 + a) = 2A(2020)$,pentru orice număr real a.
c)Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-14)$.

3.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(M(1)) = 4$.
b)Demonstrați că $M(a)M(b) = M(a + b + 3ab)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a) = M(1)$.

4.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(M(1)) = 6$.
b)Demonstrați că $M(a)M(b) = M(a + b + 5ab)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a) = M(3)$.

5.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 - 4a & -2a \\ 6a & 1 + 3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-1)) = 2$.
b)Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a + b - ab)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n) = A(-2)$.

6.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-4a & 6a\\ -2a & 1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-1))=2$.
b)Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b-ab)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n)=A(-5)$.
7.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}(a-3) & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
$\begin{cases}(a-3)x+ay+z=2a-1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ 2x+ay+z=1\end{cases}$
a)Arătați că $\det(A(0))=5$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Pentru a=1, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.
8.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 3 & 1\\ a & 2 & 1\\ a & a-3 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații
$\begin{cases}(2a-1)x+3y+z=1\\ ax+2y+z=1\\ ax+(a-3)y+z=2a-1\end{cases}$
a)Arătați că $\det(A(0))=-5$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
c)Pentru a=1, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $y_0^2=x_0z_0$.
9.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & x\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=-7$.
b)Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale a,știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.
10.Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & 1\\ x & -2\end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1))=-7$.
b)Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$,pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale a,știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.
11.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ 3 & a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(X(1))=-2$.
b)Demonstrați că $X(-a)+X(a)=X(-2020)+X(2020)$,pentru orice număr real a.
c)Determinați perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.
12.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}a & 6\\ 1 & a\end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(X(1))=-5$.
b)Demonstrați că $X(-a)+X(a)=X(-2019)+X(2019)$,pentru orice număr real a.
c)Determinați perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.
13.Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix}a & -9b\\ -b & a\end{pmatrix}$,unde a și b sunt numere reale.

a)Arătați că $\det(X(3,1)) = 0$.
b)Demonstrați că $X(a,b)X(c,d) = X(ac + 9bd, ad + bc)$, pentru orice numere reale a,b,c și d.
c)Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n)) = 1$.

14.Se consideră matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} -a & b \\ 9b & -a \end{pmatrix}$,unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(X(3,1)) = 0$.
b)Demonstrați că $X(a,b)X(c,d) = X(-ac - 9bd, -ad - bc)$, pentru orice numere reale a,b,c și d.
c)Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n)) = 1$.

15.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(M(1)) = 0$.
b)Demonstrați că $M(x) - M(2019) = M(-2019) - M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n) = M(mn)$.

16.Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(M(1)) = 0$.
b)Demonstrați că $M(x) - M(2020) = M(-2020) - M(-x)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n) = M(mn)$.

17.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=2$.
b)Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA-yI_3$.
c)Determinați inversa matricei $B=A-I_3$.

18.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Arătați că $\det A=2$.
b)Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA-yI_3$.
c)Determinați inversa matricei $B=A-I_3$.

19.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x+2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-2)) = 9$.
b)Demonstrați că $A(x) + A(-x) = A(2018) + A(-2018)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

20.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x+7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-2)) = -6$.
b)Demonstrați că $A(x) + A(-x) = A(2019) + A(-2019)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

21.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1)) = -1$.
b)Demonstrați că $A(x)A(y) = xyI_2$,pentru orice numere reale x și y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Determinați numărul real a,știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.
22.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ x & 0 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(1)) = -2$.
b)Demonstrați că $A(x)A(y) = 2xyI_2$,pentru orice numere reale x și y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinați numărul real a,știind că $A(2^a)A(2^{a+1})A(2^{a+2}) = A(32)$.
23.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+2 & 1 \\ 3 & x & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
b)Determinați numărul real x,pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(3)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+2)$,$N(3, n)$ și $P(4,0)$.Determinați numărul natural n,știind că punctele M,N și P sunt coliniare.
24.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+3 & 1 \\ 4 & x & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
b)Determinați numărul real x,pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(6)$.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+3)$,$N(4, n)$ și $P(5,0)$.Determinați numărul natural n,știind că punctele M,N și P sunt coliniare.
25.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m-2 & -1 \\ 2 & m-3 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculați $\det(A(0))$.
b)Demonstrați că $A(m)+A(2-m)=2A(1)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m.
26.Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m-1 & -1 \\ 2 & -m-2 \end{pmatrix}$,unde m este număr real.
a)Calculați $\det(A(0))$.
b)Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(-1)$,pentru orice număr real m.
c)Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă,pentru orice număr real m.
27.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & x \\ 4 & 25 & x^2 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculați $A(1) - A(0)$.
b)Arătați că $\det(A(x))=3(x-2)(x-5)$,pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) \leq \det(A(x))$,pentru orice număr real x.
28.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Calculați $A(1) - A(0)$.
b)Arătați că $\det(A(x))=(x-2)(x+3)$,pentru orice număr real x.
c)Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) \leq \det(A(x))$,pentru orice număr real x.
29.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 4$.

b)Determinați numerele reale a,pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Arătați că $A(a)A(b) = 2A(a + b) + abI_2$ pentru orice numere reale a și b,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
30.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -3a \\ -3a & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
b)Determinați numerele reale a,pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Arătați că $A(a)A(b) = A(a + b) + 9abI_2$ pentru orice numere reale a și b,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
31.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3a & 16 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $A(3)+A(-3) = 2A(0)$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A(2) \cdot X = A(1)$.
32.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 9 & 2a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $A(1)+A(-1) = 2A(0)$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
c)Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A(2) \cdot X = A(8)$.
33.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=-2$.
b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(B(x) + I_2) = 8$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
34.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} x & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det A=-2$.
b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(B(x) + I_2) = 14$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
35. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $A(2017) + A(2019) = 2A(2018)$.
b)Determinați numărul real a pentru care $\det A(a) = 0$.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2) + xA(3)) = 0$.
36. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $A(2018) + A(2020) = 2A(2019)$.
b)Determinați numărul real a pentru care $\det A(a) = 0$.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(3) + xA(5)) = 0$.
37. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 9$.
b)Determinați numărul real a ,știind că $A(1) + A(5) = aA(3)$.
c)Arătați că $A(x)A(y) = 3A(x + y) + xyI_2$ pentru orice numere reale x și y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

38. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 4 & x \\ x & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0)) = 16$.
b) Determinați numărul real a ,știind că $A(1) + A(3) = aA(2)$.
c) Arătați că $A(x)A(y) = 4A(x + y) + xyI_2$ pentru orice numere reale x și y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

39. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ 3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(4))$.
b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(-x) = I_2$,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(n)) = \frac{n^2(n-5)(n+7)}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

40. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $\det(A(2))$.
b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(-x) = I_2$,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

41. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2019 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Arătați că $A+A\cdot A=2019I_2$.
c) Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2019I_2$.

42. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2014 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Arătați că $A+A\cdot A=2014I_2$.
c) Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2014I_2$.

43. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Calculați $\det A(1)$.
b) Determinați numărul real a știind că $\det A(a) = 1$.
c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

44. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3a+2 & 1-a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Calculați $\det A(1)$.
b) Determinați numărul real a știind că $\det A(a) = 3$.
c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

45. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det B$.
b) Arătați că $AB=BA$.
c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 64$.

46. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculați $\det B$.
b)Arătați că $AB=BA$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = -1$.

47.Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 2n+1 & 2n^2+1 \\ 0 & n & n^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculați suma elementelor matricei A.
b)Aflați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.
c)În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2n+1)$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Determinați valorile numărului natural $n, n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2 - 3$.

48.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 2-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det M(3)$.
b)Verificați dacă $M(x) \cdot M(y) = M(2xy - 2x - 2y + 2) + 2I_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinați numărul real a astfel încât $M(a) \cdot M(x) = 2M(x)$, pentru orice număr real x.

49. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 4-x \\ 4-x & x \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det M(5)$.
b)Verificați dacă $M(x) \cdot M(-x) = M(4 - 2x^2) + 12I_2$, pentru orice număr real x, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c)Determinați numărul real a astfel încât $M(a) \cdot M(x) = 4M(a)$, pentru orice număr real x.

50.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a)Arătați că $A(6) + A(2) = 2A(4)$.
b)Determinați numărul real x pentru care $\det A(x) = 0$.
c)Determinați inversa matricei $A(2)$.

51.Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 2x & 1 & 2x \\ 2x & 2x & 1 \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det(A(1))$.
b)Arătați că $A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(1) = 5A\left(\frac{1}{2}\right)$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = 0$.

52.Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + y = 0 \\ -y - z = 1 \end{cases}$, unde a este un număr real.
a)Determinați numărul real a știind că $(x, y, z) = (1, -2, 1)$ este soluție a sistemului.
b)Calculați determinantul matricei sistemului.
c)Rezolvați sistemul pentru $a = -2$.

53.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det A$.
b)Arătați că $A^2 - 6A = I_2$.
c)Determinați inversa matricei $B=A-6I_2$.

54.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

a)Arătaţi că $A \cdot B = B \cdot A$.

b)Verificaţi dacă $\det(A + B) > \det A + \det B$.

c)Determinaţi numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pentru care $X^2 = A$,unde a și b sunt numere reale.

55.Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix}$,unde a și b sunt numere reale.

a)Calculaţi $D(1,0)$.

b)Arătaţi că $D(a, b) = (a - 1)(b - 1)(b - a)$, pentru orice numere reale a și b.

c)Demonstraţi că numărul $D(m, n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

56.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Calculaţi $\det B$.

b)Arătaţi că $AB = BA$.

c)Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 1$.

57.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a + 1 & 1 - a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Calculaţi $\det A(1)$.

b)Determinaţi numărul real a știind că $\det A(a) = 1$.

c)Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

58.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a - 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Verificaţi dacă $A(2015) + A(2017) = 2A(2016)$.

b)Determinaţi numărul real a știind că $\det A(a) = 0$.

c)Determinaţi numărul real x pentru care $\det\big(A(3) - xA(2)\big) = 0$.

59.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big) = 9$.

b)Determinaţi numărul real a ,știind că $A(1) + A(3) = a \cdot A(2)$.

c)Arătaţi că $A(x)A(y) = 3A(x + y) + xyI_2$ pentru orice numere reale x și y,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

60.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ -2a & 1 \end{pmatrix}$,unde a este număr real.

a)Arătaţi că $\det\big(A(0)\big) = 1$.

b)Determinaţi numerele reale a,pentru care $\det\big(A(a)\big) = 0$.

c)Arătaţi că $A(a)A(b) = A(a + b) + 4abI_2$ pentru orice numere reale a și b,unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

61.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 3a & 9 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a)Arătaţi că $A(2) + A(-2) = 2A(0)$.

b)Determinaţi numerele reale a pentru care $\det\big(A(a)\big) = 0$.

c)Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(3) \cdot X = A(6)$.

62.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a)Arătaţi că $\det A = -2$.

b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(B(x)+I_2)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.
63.Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+4a & -8a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Arătați că $X(-2)+X(2)=2X(0)$.
b)Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+2ab)$,pentru orice numere reale a și b.
c)Aflați valorile lui a din $\mathbb{R}$ pentru care $X(a)$ este inversabilă.
64.Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ x & x-1 & -2\\ 4 & 7-x & x^2\end{vmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculați $D(2)$.
b)Arătați că $D(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$,pentru orice număr real x.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(2^x-3)=0$.
65.Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix}x & 2a & 2a\\ -2a & x & 2a\\ -2a & -2a & x\end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.
a)Calculați $\det A(3,0)$.
b)Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2x\cdot A(1,0)$,pentru orice numere reale x și a.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det A(x,-1)=0$.
66.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Calculați $\det(A(4))$.
b)Arătați că $A(-2016)+A(2016)=2A(0)$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=x^2$.
67.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2017\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculați detA.
b)Arătați că $A+A\cdot A=2017I_2$.
c)Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2017I_2$.
68.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2014 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculați detA.
b)Arătați că $A+A\cdot A=2014I_2$.
c)Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2014I_2$.
69.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1-a\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Calculați $\det A(1)$.
b)Determinați numărul real a știind că $\det A(a)=1$.
c)Determinați inversa matricei $A(0)$.
70. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2016\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
a)Calculați detA.
b)Arătați că $A+A\cdot A=2016I_2$.
c)Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2016I_2$.
71.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 1\\ a+1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
a)Calculați $\det A(1)$.

b)Determinați numărul real a știind că $\det A(a) = 1$.
c)Determinați inversa matricei $A(0)$.

72.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det B$.
b)Arătați că $AB=BA$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 8$.

73.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det B$.
b)Arătați că $AB=BA$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 1$.

74. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det B$.
b)Arătați că $AB=BA$.
c)Determinați numerele reale x pentru care $\det(B + xA) = 1$.

75. Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$,unde a și b sunt numere reale.
a)Calculați $D(1,0)$.
b)Arătați că $D(a, b) = (a - 1)(b - 1)(b - a)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Demonstrați că numărul $D(m, n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

76. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
a)Arătați că $A \cdot B = B \cdot A$.
b)Verificați dacă $\det(A + B) > \det A + \det B$.
c)Determinați numărul matricelor $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pentru care $X^2 = A$,unde a și b sunt numere reale.

77. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.
a)Calculați $\det A$.
b)Arătați că $A^2 + 4A = -I_2$.
c)Determinați inversa matricei $B=A+4I_2$.

78.Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 - a & 1 \\ 1 & 2 - a \end{pmatrix}$,unde a este un număr real.
a)Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
b)Demonstrați că $A(2a) + A(-2a) = 2A(0)$,pentru orice număr real a.
c)Determinați numărul real x,știind că $A(3x)A(3x) = 2A(1)$.

79.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2x & -2x \\ x & 1 - x \end{pmatrix}$,unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
b)Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x + y + xy)$,pentru orice numere reale x și y.
c)Determinați numerele reale $x, x \neq -1$,pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei .

80.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 3x-2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(-2))=-15$.
b)Demonstrați că $A(-x)+A(x)=A(2020)+A(-2020)$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -1\end{pmatrix}$.

81.Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & 3b\\ -b & a\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A(1,1))=4$.
b)Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-2ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

82.Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a & -b\\ 4b & a\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A(1,1))=5$.
b)Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-3ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b.
c)Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

83.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+3 & x+2\\ x-2 & x-3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(x))=-5$, pentru orice număr real x.
b)Determinați numărul natural n astfel încât
$A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.
c)Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}16 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

84.Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x-3 & x-2\\ x+2 & x+3\end{pmatrix}$ unde x este număr real.
a)Arătați că $\det(A(x))=-5$, pentru orice număr real x.
b)Determinați numărul natural n astfel încât
$A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.
c)Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}-2 & -11\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

85.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0))=36$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$.Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional.

86.Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+3 & a+1\\ a & a+12\end{pmatrix}$ unde a este număr real.
a)Arătați că $\det(A(0))=36$.
b)Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$.Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional.

87.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}$ unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A\cdot A)=b^2a^2$, pentru orice numere reale a și b.

b)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A=A\cdot X$.Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$.
c)Pentru a=1 și b=9, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.
88.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ unde a și b sunt numere reale.
a)Arătați că $\det(A \cdot A) = a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.
b)Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A=A\cdot X$.Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte,atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
c)Pentru a=9 și b=4, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

Legi de compoziție,grupuri

Fie M o mulțime nevidă.O funcție $\varphi:M\times M\to M$, $(x, y) \to \varphi(x, y)$,se numește lege de compoziție pe M.
Notăm $\varphi = \circ, *, \oplus, +, \cdot, \odot, \Delta, \perp, \top, \cup, \cap$, etc
Notăm $\varphi(x, y) = x \circ y, x * y, x \oplus y, x + y, x \cdot y, x \odot y, x\Delta y, x \perp y, x\top y, x \cup y, x \cap y$, etc
Fie M o mulțime nevidă și $*:M\times M\to M, (x, y) \to x * y$
$*$ este asociativă $\Leftrightarrow (x * y) * z = x * (y * z), \forall x,y,z\in M$
$*$ este comutativă $\Leftrightarrow x * y = y * x, \forall x,y,\in M$
$*$ admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x\in M$
$x\in M$ este simetrizabil în raport cu $* \Leftrightarrow \exists x'\in M$ astfel încât $x*x' = x' * x = e$
$(x')' = x$, $(ab)' = ba$, $(abc)' = cba$
Cuplul $(M,*)$ se numește grup dacă au loc axiomele :
$G_1)$ $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x,y,z\in M$,axioma asociativității
$G_2)$ $\exists e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x\in M$,axioma elementului neutru
$G_3)$ $\forall x\in M, \exists x'\in M$ astfel încât $x*x' = x' * x = e$,axioma elementelor simetrizabile
Grupul $(M,*)$ se numește grup abelian dacă are loc și axioma
$G_4)$ $x * y = y * x, \forall x,y,\in M$,axioma comutativității

Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

Fie $a\in\mathbb{Z}$ și $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$,din teoreama împărțirii cu rest obținem $a=nq+r, 0\leq r<n$,unde $q,r\in\mathbb{Z}$ sunt unice
Notăm r=amodn
$\widehat{a\oplus b} = (a + b)\text{mod}n$, $\widehat{a \odot b} = (a + b)\text{mod}n \ \forall a,b\in\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$
$\hat{a}+\hat{b} = \widehat{a\oplus b}$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b} \ \forall \hat{a}, \hat{b}\in\mathbb{Z}_n$
$-\hat{a} = \widehat{n-a}$
$\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow (a, n) = 1$, $U(\mathbb{Z}_n) = \{a | (a, n) = 1\}$
Dacă p e număr prim $\Rightarrow U(\mathbb{Z}_p) = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots, \widehat{p-1}\} = \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$

Polinoame,rădăcini ale polinoamelor

Fie $K\in\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$ cu p prim, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\in K$.
$f=a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ este polinom cu coeficienți în K, $f\in K[X]$.
$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\in K$ se numesc coeficienții polinomului f.
Dacă $a_n \neq 0$ atunci gradf=n.
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$,$f:K\to K$ se numește funcție polinomială.
Pentru $\alpha\in K$, $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$ se numește valoarea polinomului f în punctul α.
α este rădăcină a lui f $\Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$.

Teorema împărţirii cu rest

Pentru polinoamele $f,g \in K[X], g \neq 0$, există și sunt unice polinoamele $c,r \in K[X]$ astfel încât $f=g \cdot c+r$ și $\operatorname{grad} r<\operatorname{grad} g$.

În acest caz avem c=câtul, r=restul.

Fie $f=a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ și $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dacă α este rădăcină a lui f atunci $\alpha | a_0$.

Fie $f=a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0, (\alpha, \beta) = 1$. Dacă $\frac{\alpha}{\beta}$ este rădăcină a lui f atunci $\alpha | a_0$ și $\beta | a_n$.

Fie $f=a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ și $a,b,d \in \mathbb{Q}$ $d>0, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Atunci: $a+b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ $a-b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f, și cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate.

Fie $f=a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ și $a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Atunci:
$a+bi$ este rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ $a-bi$ este rădăcină a lui f, și cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate.

Divizibilitatea polinoamelor, teorema restului, teorema lui Bezout

Fie $f,g \in K[X]$ două polinoame, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$ cu p prim.

$f \vdots g \Leftrightarrow \exists h \in K[X]$ astfel încât $f=gh \Leftrightarrow$ restul împărţirii lui f la g este polinomul nul $(g \neq 0)$

$f \vdots g \Leftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt și rădăcini ale lui f, cu cel puţin acelaţi ordin de multiplicitate ca la g

Teorema restului

Restul împărţirii lui f la $X-\alpha$ este egal cu $r = f(\alpha)$

Restul împărţirii lui f la $X+\alpha$ este egal cu $r = f(-\alpha)$

Teorema lui Bezout

$f \vdots X-\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$, $f \vdots X+\alpha \Leftrightarrow f(-\alpha) = 0$

Relaţiile lui Viete

Pentru ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, cu soluţiile x_1, x_2, sau polinomul $f=aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile x_1, x_2, avem

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ s_2 = x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$S_2=x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2=s_1^2 - 2s_2$

$f=aX^2 + bX + c=a(X - x_1)(X - x_2)$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

polinomul $g=X^2 - s_1X + s_2$ are rădăcinile x_1, x_2

ecuaţia $x^2 - s_1x + s_2 = 0$ are soluţiile x_1, x_2

Pentru ecuaţia $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cu soluţiile x_1, x_2, x_3, sau polinomul $f=aX^3 + bX^2 + cX + d$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, avem

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ s_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

$S_2 =x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)=s_1^2 - 2s_2$

$f=aX^3 + bX^2 + cX + d=a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$,

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

polinomul $g=X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3

ecuaţia $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = 0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3

Pentru ecuaţia $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, cu soluţiile x_1, x_2, x_3, x_4, sau polinomul

$f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$,cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, avem

$$\begin{cases} s_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a} \\ s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a} \\ s_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a} \\ s_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a} \end{cases}$$

$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=$
$=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=s_1^2-2s_2$
$f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$,
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$
polinomul $g=X^4-s_1X^3+s_2x^2-s_3X+s_4$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4
ecuația $x^4-s_1x^3+s_2x^2-s_3x+s_4=0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4

Subiectul II2(prelucrări bacalaureat)

1.Pe mulțimea $G=(-5,5)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{25x+25y}{25+xy}$.
a)Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
b)Determinați $x\epsilon G$, pentru care $x*x=5$.
c)Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G, f(x)=\frac{5(x-1)}{x+1}$.Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\epsilon(0,+\infty)$.
2.Pe mulțimea $G=(-4,4)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{16x+16y}{16+xy}$.
a)Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$*$".
b)Determinați $x\epsilon G$, pentru care $x*x=2$.
c)Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G, f(x)=\frac{4(x-1)}{x+1}$.Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\epsilon(0,+\infty)$.
3.Pe mulțimea numerelor reale se defineţte legea de compoziție asociativă $x*y=7x+7y-xy-42$.
a)Arătați că $x*y=-(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
c)Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.
4.Pe mulțimea numerelor reale se defineţte legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-xy-12$.
a)Arătați că $x*y=-(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
c)Calculați $(-1)*2*(-3)*4*\ldots*(-2021)*2022$.
5.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=7xy-7x-7y+8$.
a)Arătați că $x\circ y=7(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\leq 64$.
c)Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2021^n$, pentru orice număr natural nenul n.
6.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=6xy-6x-6y+7$.
a)Arătați că $x\circ y=6(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\leq 25$.
c)Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2022^n$, pentru orice număr natural nenul n.

7.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy-4(x+y)+5$.
a)Demonstrați că $x*y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<17$
c)Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-\frac{59}{5}$.
8.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy-7(x+y)+8$.
a)Demonstrați că $x*y=7(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<50$.
c)Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-\frac{219}{5}$.
9.Se consideră polinomul $f=4X^3-8X-m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=-4$,arătați că $f(1)=0$.
b)Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2-X+1.
c)Determinați numărul real m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
10.Se consideră polinomul $f=2X^3-6X+m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=4$,arătați că $f(1)=0$.
b)Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.
c)Determinați numărul real m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
11.Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-X-m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=3$,arătați că $f(-3)=0$.
b)Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X-1$ polinomul f se divide cu X^2+4X+3.
c)Determinați numărul real nenul m, știind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=11$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
12.Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-X+m$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m=3$,arătați că $f(3)=0$.
b)Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$ polinomul f se divide cu X^2-4X+3.
c)Determinați numărul real nenul m, știind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
13.Se consideră polinomul $f=-2X^3+4X^2+8X-m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=10$, arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{3}$.
c)Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.
14.Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-8X+m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=10$, arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{3}$.
c)Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.
15.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=9xy+x+y$.
a)Arătați că $x\circ y=9\left(x+\frac{1}{9}\right)\left(y+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}$, pentru orice numere reale x și y.
b)Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=8$.
c)Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9x+1$.Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y și z.

16.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 8xy + x + y$.
a)Arătaţi că $x \circ y = 8\left(x + \frac{1}{8}\right)\left(y + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Determinaţi numerele reale x, pentru care $x \circ x = 3$.
c)Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8x + 1$.Demonstraţi că $f(x \circ y \circ z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$, pentru orice numere reale x,y şi z.
17.Pe mulţimea $M = (0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x^{2 \log_4 y}$.
a)Arătaţi că $2 \circ 16 = 16$.
b)Determinaţi numărul real x, $x \in M$ pentru care $x \circ 4 = 36$.
c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$" este comutativă.
18.Pe mulţimea $M = (0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x^{3 \log_3 y}$.
a)Arătaţi că $3 \circ 3 = 27$.
b)Determinaţi numărul real x, $x \in M$ pentru care $x \circ 3 = 125$.
c)Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$" este comutativă.
19.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.
a)Arătaţi că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $e = -6$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$".
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x \circ (-2019) = 2019 \circ (-7)$.
20.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$.
a)Arătaţi că $x \circ y = (x - 6)(y - 6) + 6$, pentru orice numere reale x şi y.
b)Arătaţi că $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$".
c)Determinaţi numărul real x pentru care $x \circ (-2017) = 2017 \circ 6$.
21.Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 - X + 2$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m = -2$,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Arătaţi că dacă polinomul f se divide cu $X - 2$,atunci restul împărţirii lui f la $X - 3$ este egal cu 8.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
22.Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 - X - 3$,unde m este un număr real.
a)Pentru $m = 3$,arătaţi că $f(1) = 0$.
b)Arătaţi că dacă polinomul f se divide cu $X + 3$,atunci restul împărţirii lui f la $X + 2$ este egal cu 3.
c)Determinaţi numărul real m, ştiind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{10}{3}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
23.Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + 2X - 1$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 6$,pentru orice număr real a.
b)Pentru $a = -2$,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 - X + 2$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
24.Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + 3X - 1$, unde a este număr real.
a)Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 8$,pentru orice număr real a.
b)Pentru $a = 2$,calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
c)Determinaţi numărul real a pentru care
$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
25.Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = -5xy + 25x + 25y - 120$.
a)Arătaţi că $x * y = -5(x - 5)(y - 5) + 5$,pentru orice numere reale x şi y.
b)Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.

c)Determinați numărul real x,pentru care $(x * x) * x = 30$.
26.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-2xy+4x+4y-6$.
a)Arătați că $x*y=-2(x-2)(y-2)+2$,pentru orice numere reale x și y.
b)Demonstrați că legea de compoziție „*” este asociativă.
c)Determinați numărul real x,pentru care $(x * x) * x = -2$.
27.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y=4xy-8x-8y+17$.
a)Arătați că $x \circ y=4(x-2)(y-2)+1$,pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $N=2017 \circ 2018$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinați numerele naturale a și b pentru care $a \circ b=25$.
28.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y=4xy+4x+4y+5$.
a)Arătați că $x \circ y=4(x+1)(y+1)+1$,pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $N=2016 \circ 2017$ este pătratul unui număr natural.
c)Determinați numerele naturale a și b pentru care $a \circ b=25$.
29.Se consideră polinomul $f = X^3 + 6X^2 + mX + 6$, unde m este număr real.
a)Calculați $f(0)$.
b)Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=1$,știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.
30. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 + X - 5$.
a)Calculați $f(0)$.
b)Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=1$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Calculați $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$.
d)Rezolvați ecuația $f(x) = 0$.
31.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy+3x+3y+3$.
a)Calculați $1 * 2$.
b)Arătați că $x*y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = 23$.
32. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy+x+y$.
a)Calculați $1 * 2$.
b)Arătați că $x*y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = 0$.
33.Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 3$,unde m este un număr real.
a)Arătați că $f(0) = 3$.
b)Determinați numărul real m,știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2 + X - 3$ este egal cu 0.
c)Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-9$,pentru orice număr real m,unde x_1, x_2și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
34.Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 4$,unde m este un număr real.
a)Arătați că $f(0) = 2$.
b)Determinați numărul real m,știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2 + X - 4$ este egal cu 0.
c)Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-12$,pentru orice număr real m,unde x_1, x_2și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

35.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y=2xy-8x-8y+36$.
a)Arătați că $(-4) \circ 4 = 4$.
b)Arătați că $x \circ y=2(x-4)(y-4)+4$,pentru orice nemere reale x și y.
c)Calculați $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2020}$.
36.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x \circ y=4xy-12x-12y+39$.
a)Arătați că $(-3) \circ 3 = 3$.
b)Arătați că $x \circ y=4(x-3)(y-3)+3$,pentru orice nemere reale x și y.
c)Calculați $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2019}$.
37.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-8x-8y+72$.
a)Arătați că $(-8) * 8 = 8$.
b)Arătați că $x*y = (x-8)(y-8)+8$,pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*\ldots*2020$.
38.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+7x+7y+42$.
a)Arătați că $(-7) * 7 = -7$.
b)Arătați că $x*y = (x+7)(y+7)-7$,pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $(-2019)*(-2018)*(-2017)*\ldots*(-1)$.
39. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy-5x-5y-30$.
a)Arătați că $(-5) * 5 = -5$.
b)Arătați că $x*y=-(x+5)(y+5)-5$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+3)*(3x-2) = -5$.
40. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy-4x-4y-20$.
a)Arătați că $(-4) * 4 = -4$.
b)Arătați că $x*y=-(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+1)*(2x-1) = -8$.
41. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=4xy+12x+12y+33$.
a)Arătați că $3 * (-3) = -3$.
b)Arătați că $x*y=4(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.
42. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3xy-6x-6y+14$.
a)Arătați că $2 * (-2) = 2$.
b)Arătați că $x*y=3(x-2)(y-2)+2$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.
43. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=3(x+y-2)-xy$.
a)Calculați $1*3$.
b)Arătați că $x*y = 3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.
44. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y=2(x+y-1)-xy$.
a)Calculați $2*3$.
b)Arătați că $x*y = 2-(x-2)(y-2)$ pentru orice numere reale x și y.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.
45.Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 + mX - 24$, unde m este număr real.

a)Calculați $f(0)$.
b)Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{3}{8}$,știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.
46.Se consideră polinomul $f = X^3 - 12X^2 + mX - 40$, unde m este număr real.
a)Calculați $f(0)$.
b)Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{3}{10}$, știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.
47.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy-5x-5y+15$.
a)Calculați $2\circ 4$.
b)Arătați că $x\circ y = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x = 3$.
48.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y = 2xy-x-y+1$.
a)Calculați $1\circ 3$.
b)Arătați că $x\circ y = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x = 5$.
49.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = xy-5(x+y-6)$.
a)Calculați $5*6$.
b)Arătați că $x*y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*...*2020$.
50.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = xy-10(x+y-11)$.
a)Calculați $1*10$.
b)Arătați că $x*y = (x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*...*2019$.
51. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - mX - 24$, unde m este număr real.
a)Calculați $f(0)$.
b)Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{3}{8}$,știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.
c)Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.
52.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = xy-5(x+y-6)$.
a)Calculați $5*6$.
b)Arătați că $x*y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*...*2015$.
53. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = xy+4(x+y+3)$.
a)Calculați $(-4)*(-5)$.
b)Arătați că $x*y = (x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $(-1)*(-2)*(-3)*...*(-2015)$.
d)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=12$.

e) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(\log_2 x) * (\log_4 x) = -4$.
54. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = xy+5(x+y+4)$.
a)Calculați $(-5)*(-6)$.
b)Arătați că $x*y = (x+5)(y+5)-5$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $(-2015)*(-2014)*(-2013)*...*2014*2015$.
55.Se consideră inelul$(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$,unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.
a)Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x - \hat{2} = \hat{4}$.
b)Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6, f(x) = x^2 - x$.
c)Determinați numărul de elemente ale mulțimii $H=\{x^9 | x\in\mathbb{Z}_6\}$.
56.Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+2X+a$,unde $a\in\mathbb{R}$.
a)Pentru $a=-3$,arătați că $f(1)=0$.
b)Determinați numărul real a, știind că $(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)=2$.
c)Pentru $a\neq 0$,determinați un polinom de grad trei,având coeficienți reali,care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.
57.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = \sqrt{x^2+y^2+3}$.
a)Calculați $3*2$.
b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x = \sqrt{12}$.
c)Arătați că numărul $\underbrace{1*1*...*1}_{1 \text{ de } 7 \text{ ori}}$ este întreg.
58.Se consideră inelul$(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$,unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.
a)Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x + \hat{4} = \hat{1}$.
b)Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6, f(x) = x - x^3$.
c)Determinați numărul de elemente ale mulțimii $H=\{x^{10} | x\in\mathbb{Z}_6\}$.
59. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = xy-3(x+y-4)$.
a)Calculați $3*4$.
b)Arătați că $x*y = (x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
c)Calculați $1*2*3*...*2014$.
60. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-4x-4y+4$.
a)Calculați $2*3$.
b)Arătați că $x*y=5\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(y-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=9$.
61. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy-5x-5y+10$.
a)Calculați $\frac{4}{3}\circ\frac{5}{3}$.
b)Arătați că $x\circ y=3\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$ pentru orice numere reale x și y.
c)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=\frac{41}{3}$.
d)Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.
62.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+3x+3y+6$.
a)Arătați că $0*(-3)=-3$.
b)Arătați că $x*y=(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = 5$.

63. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = ax+y+1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 1$ calculați $2015 \circ 2016$.

b) Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.

c) Pentru $a=-1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x \circ 4^x = 1$.

64. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -xy+3x+3y-6$.

a) Arătați că $(-3) * 3 = 3$.

b) Arătați că $x * y = -(x-3)(y-3)+3$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+3) * (2x-1) = 5$.

65. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy-3x-3y-12$.

a) Arătați că $3 * (-3) = -3$.

b) Arătați că $x * y = -(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+3) * (2x-1) = 6$.

66. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4xy+12x+12y+33$.

a) Arătați că $3 * (-3) = -3$.

b) Arătați că $x * y = 4(x+3)(y+3)-3$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

67. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 4xy+4x+4y+3$.

a) Arătați că $x \circ y = 4(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y.

b) Aflați numerele întregi a și b, știind că $a \circ b = 3$.

c) Calculați $(-2016) \circ (-2015) \circ (-2014) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2014 \circ 2015$.

68. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 3$, unde m este un număr real.

a) Arătați că $f(0) = 3$.

b) Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g = X^2 + X - 3$ este egal cu 0.

c) Demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -9$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

69. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy-8x-8y+36$.

a) Arătați că $(-4) \circ 4 = 4$.

b) Arătați că $x \circ y = 2(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2016}$.

70. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy+7x+7y+42$.

a) Arătați că $7 * (-7) = -7$.

b) Arătați că $x * y = (x+7)(y+7)-7$ pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați $(-1) * (-2) * (-3) * \ldots * (-2016)$.

71. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy-3x-3y+4$.

a) Arătați că $x \circ y = 3(x-1)(y-1)+1$ pentru orice numere reale x și y.

b) Aflați numerele întregi a și b, știind că $a \circ b = 7$.

c) Calculați $(-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2014 \circ 2015 \circ 2016$.

72. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = mX^3 + mX^2 + X + 1$, unde m este un număr real, nenul.

a) Arătați că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real, nenul m.

b) Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$.

c) Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1| = |x_2| = |x_3|$.

73. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 - 3X + m$, unde m este număr real.
a)Pentru $m = 5$ calculați $f(1)$.
b)Aflați numărul real m știind că restul împărțirii polinomului f la $X-3$ este egal cu 3.
c)Pentru m=9, arătați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1$, unde unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
74. Se consideră polinomul $f = X^3 - X - a$,unde a este număr întreg.
a)Pentru $a = 2$, calculați $f(2)$.
b)Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Arătați că,dacă polinomul f are o rădăcină întreagă,atunci a este multiplu de 6.
75. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x*y = \sqrt{x^2 + y^2 + 9}$.
a)Calculați $3*3$.
b)Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x = \sqrt{45}$.
c)Arătați că numărul $\sqrt{20} * \sqrt{20}$ este număr întreg.
76.Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3 + X - a$,unde $a\in\mathbb{R}$.
a)Pentru $a = 2$,arătați că $f(1) = 0$.
b)Determinați numărul real a, știind că $(3 - x_1)(3 - x_2)(3 - x_3) = 3$.
c)Pentru $a\neq 0$,determinați un polinom de grad trei,având coeficienți reali,care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.
77.Se consideră polinomul $f=X^3 - 2X^2 + mX + 8$,unde m este un număr real.
a)Arătați că $f(-1) + f(1) = 12$, pentru orice număr real m.
b)Pentru $m=-4$,arătați că polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 4$.
c)Determinați numărul real m,știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$.
78.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y = 3xy+12x+12y+44$.
a)Arătați că $x\circ y = 3(x + 4)(y + 4) - 4$,pentru orice numere reale x și y.
b) Arătați că „$\circ$ ” este asociativă pe $\mathbb{R}$.
c)Determinați numerele reale x,pentru care $x\circ x\circ x=x$.
79.Pe mulțimea $M=(0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x^{5 \log_5 y}$.
a)Arătați că $5\circ 5=3125$.
b)Determinați numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 5=243$.
c)Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.
80.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+9x+9y+72$.
a)Arătați că $x\circ y=(x + 9)(y + 9) - 9$, pentru orice numere reale x și y.
b)Arătați că $e=-8$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
c)Determinați numărul real x pentru care $x\circ(-2020) = 2020 \circ (-8)$.
81.Se consideră polinomul $f=X^3 - 15X^2 + mX - 105$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=120$, arătați că $f(1) = 1$.
b)Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_2 - x_3) + x_3(x_3 - x_1) = 0$, unde x_1,x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.
82.Se consideră polinomul $f=X^3 - 15X^2 - mX - 105$, unde m este număr real.
a)Pentru $m=-120$, arătați că $f(1) = 1$.

b)Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_2-x_1)+x_2(x_3-x_2)+x_3(x_1-x_3)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
c)Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.
83.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{x+y+4}{x^2+y^2+4}$.
a)Arătați că $0*1=1$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*x=1$.
c)Demonstrați că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.
84.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{x+y+5}{x^2+y^2+5}$.
a)Arătați că $0*1=1$.
b)Determinați numerele reale x pentru care $x*x=1$.
c)Demonstrați că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.
85.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-4$.
a)Arătați că $1\circ 27=0$.
b)Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=8$.
86.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}+2$.
a)Arătați că $0\circ(-8)=$.
b)Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.
c)Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=8$.
87.Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{1+2y}+y\sqrt{1+2x}$.
a)Arătați că $4*4=24$.
b)Demostrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.
c)Determinați $x\in M$ pentru care $4*(2x^2+2x)=24$.
88.Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{2y+1}+y\sqrt{2x+1}$.
a)Arătați că $4*4=24$.
b)Demostrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.
c)Determinați $x\in M$ pentru care $(2x^2+2x)*4=24$.

Tabel de derivate

$c' = 0$	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^2)' = 2x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{x^2+1}$
$(x^4)' = 4x^3$	$(e^x)' = e^x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^{-x})' = -e^{-x}$	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

Reguli de derivare

$(f+g)' = f' + g'$ $(f-g)' = f' - g'$ $(\alpha f)' = \alpha f'$ $(fg)' = f'g + fg'$

$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Derivate

1.Calculați $f'(x)$ pentru următoarele funcții:

$f(x) = 2016, f(x) = 6\sqrt{2}, f(x) = \mathrm{tg}4, f(x) = x^4, f(x) = x^{100}, f(x) = x^{2015}, f(x) = x^9, f(x) = x^{900},$
$f(x) = x^{2017}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1}{x^3}, f(x) = \frac{1}{x^8}, f(x) = \frac{1}{x^{2014}}, f(x) = \log_4 x, f(x) = \log_5 x, f(x) = \log_{0,3} x,$
$f(x) = 5^x, f(x) = 6^x, f(x) = 2014^x, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x,$
$f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, f(x) = \log_3(5x) + \log_3\frac{1}{5}, f(x) = \log_6(4x^2) - \log_6(4x),$
$f(x) = \log_2(3x^2) + \log_2\frac{1}{3x}, f(x) = 5^x, f(x) = 2016^x, f(x) = 5^{2x}, f(x) = e^{3x}, f(x) = x^3 + 3^x,$
$f(x) = x^3 + 4x + 1, f(x) = x^3 - 3x + 2, f(x) = x^3 + 2x^2 - 5, f(x) = 3x - x^5,$
$f(x) = 2 - 3x + x^2 - 5x^3, f(x) = 6x - x^4, f(x) = x + 3\sqrt{x}, f(x) = x^4 + \sin x + \cos x,$
$f(x) = \cos x - \sin x, f(x) = x - \cos x + \sin x, f(x) = x^2 + 5\sqrt{x}, f(x) = x - 3\sqrt{x},$
$f(x) = 5x^3 + \ln x, f(x) = 5^x + 2^x - x, f(x) = 3^x + 4^x - x^2, f(x) = 4\cos x + 3\sin x - x,$
$f(x) = 5\sin x - 6\cos x + \sqrt{2}, f(x) = x^4 + \log_4 x + 2^x, f(x) = x^3 + \log_3 x - \sin x,$
$f(x) = x^4 + \log_4 x + \cos x, f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{3} + \mathrm{tg}x, f(x) = \sqrt[3]{x} - 3^2 + \mathrm{ctg}x,$
$f(x) = (x-2)^2 + (x+2)^2, f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3} + \log_{0,6} x, f(x) = \log_4 x^4 + \log_3 x^6,$
$f(x) = 3\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x, f(x) = 4\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x, f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}x, f(x) = 3^{x+1} + 2^{x-1},$
$f(x) = 5\mathrm{ctg}x - 2\mathrm{tg}x + 3^x, f(x) = 1^x + 2^x + e^x + 3^x, f(x) = \log_5 x^5 - \log_{\frac{1}{2}} x^3,$
$f(x) = 5^{x+1} + 3^{x-1}, f(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}, f(x) = 3^x + x^3 + \sqrt[3]{x} + \log_3 x,$
$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 10, f(x) = (1-3x)(1+6x), f(x) = \sin 2x, f(x) = (1+x)\ln x,$
$f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\ln x, f(x) = (2\sin x + 3)(1 - 5\cos x), f(x) = (1-3x^2)(1-2\sin x),$
$f(x) = \left(-\frac{3}{x} + 4\right)(2\ln x - 3), f(x) = (1+x)(2+\ln x)(3\sin x - 5), f(x) = 3x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x,$
$f(x) = x\cos x - 5x\ln x + 3\sin x - x^2 + 2x, f(x) = (3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\sin x + 5\sin x\ln x - x^3 + 4x + 5,$
$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 6, f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, f(x) = x\ln x, f(x) = x\sin x,$
$f(x) = x\cos x, f(x) = x^2\sin x, f(x) = \sqrt{x}\sin x + 5\cos x - \frac{3}{x} + 9, f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sin x, f(x) = \frac{1}{x+2},$

$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(1+2x+3x^2), f(x) = \frac{x+1}{x-1}, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = \frac{x}{x^2+1},$

$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3+1}, f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+x+1}, f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}, f(x) = \frac{\ln x+x}{\ln x-x},$

$f(x) = \frac{\ln x+x^2}{\ln x-x^2}, f(x) = \frac{3\sin x}{3\cos x-5}, f(x) = \frac{-\sin x+3\cos x}{\sin x+4}, f(x) = \frac{2\sin x-5\cos x}{3\sin x+4}, f(x) = \frac{5x+3}{3-5x}, f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4},$

$f(x) = (5x+6)\ln x, f(x) = (5x-6)e^x, f(x) = xe^x\ln x, f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \ln x,$

$f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \cos x, f(x) = \frac{\cos x+3}{\cos x-3}, f(x) = \frac{x+e^x}{x-e^x}, f(x) = 2x^3+4x+6, f(x) = \frac{1}{x} - x,$

$f(x) = 2x^3+3x^2+5, f(x) = x - \frac{1}{x}, f(x) = x^4-2x^2+1, f(x) = 2x^3-6x+1,$

$f(x) = x^3-3x+1, f(x) = \frac{x-2}{x+2}, f(x) = x + \frac{4}{x-2}, f(x) = \frac{3x}{x^2+1}, f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x-1}{x-2},$

$f(x) = (x-1)e^x, f(x) = x^2 - \ln x, f(x) = x^2 - x, f(x) = x^3-3x+7, f(x) = e^x - x, f(x) = \sqrt{x} - 1,$

$f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = xe^x, f(x) = (x+2)^3, f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}, f(x) = x\ln x,$

$f(x) = 2x^3-4x+6, f(x) = \frac{1}{x} + x, f(x) = 2x^3-3x^2+5, f(x) = x + \frac{1}{x}, f(x) = x^4+2x^2+1,$

$f(x) = 2x^3+6x+1, f(x) = x^3+3x+1, f(x) = \frac{x+2}{x-2}, f(x) = x - \frac{4}{x-2}, f(x) = \frac{3x}{x^2-1},$

$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = x^2 + \ln x, f(x) = x^2 + x,$

$f(x) = x^3+3x+7, f(x) = e^x + x, f(x) = \sqrt{x} + 1, f(x) = \frac{x-1}{x}, f(x) = 2xe^x, f(x) = (x+3)^3,$

$f(x) = x - 10 + \frac{11}{x}, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x^3+x^2-x+1, f(x) = x^3-3x,$

$f(x) = -x^3+3x+2, f(x) = x^3-12x, f(x) = \frac{x+1}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = x^3-x^2+x+1,$

$f(x) = x^3+3x, f(x) = -x^3-3x+2, f(x) = -x^3+12x, f(x) = \frac{x-1}{x}, f(x) = -\frac{1}{x},$

$f(x) = e^x - x - 1, f(x) = 3e^x + x^2, f(x) = e^x - \ln x + x, f(x) = x^4-8x^2+16,$

$f(x) = (x+1)e^x, f(x) = xe^x - e^x + 1, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = \frac{x+\ln x}{x}, f(x) = x\ln x - x + 1,$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}, f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}, f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, f(x) = \ln(x+1) - \ln x,$

$f(x) = e^x(x^2-6x+9), f(x) = \frac{2}{x} + \ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = x - \ln x, f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1},$

$f(x) = x + \ln x, f(x) = \sqrt{x} - \ln x, f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+2}, f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}, f(x) = -\frac{4}{x^2+1},$

$f(x) = e^x - \frac{1}{x}, f(x) = \ln x + e^x, f(x) = x^3+x^2+x+3^x, f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}, f(x) = e^x - x,$

$f(x) = x^2e^x, f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}, f(x) = \sqrt{x^2+3}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}, f(x) = \sqrt{x^2+4},$

$f(x) = e^x + x - 1, f(x) = 3e^x - x^2, f(x) = e^x + \ln x - x, f(x) = x^4+8x^2-16,$

$f(x) = (x-1)e^x, f(x) = xe^x + e^x + 1, f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = \frac{x-\ln x}{x}, f(x) = x\ln x + x - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}, f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-3}, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, f(x) = \ln(x+1) + \ln x,$

$f(x) = e^x(x^2+6x+9), f(x) = \frac{2}{x} - \ln x, f(x) = x^2\ln x, f(x) = x + 2\ln x, f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+1},$

$f(x) = x - \ln x, f(x) = \sqrt{x} + \ln x, f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2}, f(x) = \frac{x-1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}, f(x) = -\frac{4}{x^2-1},$

$f(x) = e^x + \frac{1}{x}, f(x) = \ln x - e^x, f(x) = x^3-x^2+x-3^x, f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}, f(x) = e^x + x,$

$f(x) = x^3e^x, f(x) = x^2 - \frac{2}{x}, f(x) = \frac{e^x}{1-x}, f(x) = \sqrt{x^2-3}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = \sqrt{x^2-4},$

$f(x) = x^4-5x^2+3, f(x) = 4x^3-7x+2, f(x) = x^3+3x+2, f(x) = x^3-3x^2+1,$

$f(x) = \frac{x-3}{x+3}, f(x) = x + \frac{5}{x-3}, f(x) = \frac{6x}{x^2+1}, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, f(x) = \ln x - x + \frac{1}{x}, f(x) = \frac{x-2}{x-3},$

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}, f(x) = (x-2)e^x, f(x) = (x+1)e^x, f(x) = x^2 + \ln x, f(x) = x^2 - 3x,$

$f(x) = x^2 + x, f(x) = x^4 - x^3, f(x) = x^3 + 3x - 5, f(x) = e^x + x, f(x) = \sqrt{x} + 1, f(x) = \frac{x+2}{x},$

$f(x) = \frac{x-2}{x}, f(x) = xe^x, f(x) = (x+3)^2, f(x) = (x-2)^3, f(x) = x + 11 - \frac{6}{x}, f(x) = x^4 \ln x,$

$f(x) = \sqrt{x} + 4\ln x, f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}, f(x) = \frac{x-2}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, f(x) = e^x + \frac{1}{x}, f(x) = e^x - \frac{1}{x} + x,$

$f(x) = \ln x + e^x, f(x) = x^3 - x^2 + x - 3^x, f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}, f(x) = e^x - 2x, f(x) = x^3 e^x, f(x) = x^2 + \frac{3}{x},$

$f(x) = \frac{e^x}{x+2}, f(x) = \sqrt{x^2+5}, f(x) = x^3 - \frac{3}{x}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,$

$f(x) = 2x + \frac{1}{x}, f(x) = x^4 - 6x^2 + 9, f(x) = 4x^3 - 7x + 2, f(x) = x^3 - 6x + 3, f(x) = x + \frac{5}{x-3},$

$f(x) = \frac{x-4}{x+4}, f(x) = \ln x - \frac{3}{x}, f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, f(x) = (x-2)e^x, f(x) = \frac{x+2}{x+1}, f(x) = e^x(x+2),$

$f(x) = x^4 e^x, f(x) = x^{2016} e^x, f(x) = x^3 - \ln x, f(x) = x^2 - x + 3, f(x) = e^x - x^2 + 3x,$

$f(x) = x^3 - 3x + 6, f(x) = \frac{x+2}{x}, f(x) = \sqrt{x} - 4, f(x) = x\sqrt{x}, f(x) = (x+4)^3, f(x) = (x+5)^3,$

$f(x) = x^{2017} e^x, f(x) = x^5 \ln x, f(x) = (x+2)\ln x, f(x) = x + 11 - \frac{12}{x}, f(x) = x - \frac{1}{x},$

$f(x) = x + \frac{1}{x}, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(x) = e^x - \frac{1}{x}, f(x) = x\,\mathrm{tg}x, f(x) = e^x \ln x, f(x) = \frac{e^x}{\ln x}, f(x) = \frac{e^x}{x^2},$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, f(x) = e^x - e^{-x}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f(x) = x + e^{-x}, f(x) = x^{2008} - 2008(x-1) - 1,$

$f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}, f(x) = e^x + x^2, f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}, f(x) = e^x(2x^2+4x+5), f(x) = -x^2 + x,$

$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, f(x) = x - 2\ln x, f(x) = \frac{e^x}{x+1}, f(x) = \frac{\ln x}{x}, f(x) = e^{-x} - 1, f(x) = -e^{-x},$

$f(x) = e^x - 1, f(x) = \frac{e^x}{x^2}, f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, f(x) = \frac{e^x}{x+2}, f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1},$

$f(x) = x - e\ln x, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x, f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x, f(x) = e^x - x, f(x) = e^x - x - 1,$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}, f(x) = \ln x + 7, f(x) = x - \ln x, f(x) = x^2 + e^x, f(x) = x^2 \ln x, f(x) = x - \frac{1}{e^x},$

$f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x+e^x}, f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x, f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x, f(x) = \frac{x-\ln x}{x+\ln x},$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x) = \ln x - x + 1, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, f(x) = x^{2008} + 2008^x,$

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, f(x) = x^2 + e^x, f(x) = (x-1)e^x, f(x) = xe^x, f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}, f(x) = x - 2\ln x,$

$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, f(x) = (x-2)\ln x, f(x) = 1 + \sqrt{x}, f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f(x) = \sqrt{x} + x, f(x) = x\sqrt[3]{x},$

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12, f(x) = (x^2 - 1)\ln x, f(x) = x\ln x, f(x) = 3^x + 1, f(x) = e^x - x - 1,$

$f(x) = e^x - 1, f(x) = e^x - ex - 1, f(x) = x - \ln x, f(x) = \frac{x+1}{x-1}, f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1,$

$f(x) = 2^x - x\ln 2, f(x) = \frac{x+1}{x-3}, f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, f(x) = \frac{2x+3}{x+2},$

$f(x) = x + \frac{3}{2}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, f(x) = x^3 + 3x, f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2},$

$f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = \ln x + 8, f(x) = \frac{3}{x}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}, f(x) = \frac{2x+3}{x^2+2}, f(x) = (x-1)(x-2),$

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, f(x) = \frac{x+1}{e^x}, f(x) = (x-3)\ln x, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, f(x) = 2^x + 3^x, f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1},$

$f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, f(x) = (x-3)\sqrt{x}, f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \frac{x^2-x+1}{e^x}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}, f(x) = \frac{\ln x}{x^4},$

$f(x) = x\ln x - x, f(x) = x^3 - 3x + 1, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x,$

$f(x) = x^2 - x - \ln x, f(x) = \frac{e^x}{x}, f(x) = (x^2+1)e^x - 1, f(x) = xe^x, f(x) = \frac{x^2}{x-1}, f(x) = \frac{x^3}{\ln x},$

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, $f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$,

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, $f(x) = x^3 + 3x$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{x}$, $f(x) = x + \sqrt{x}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$,

$f(x) = (x-1)(x-2)$, $f(x) = (x-3)\ln x$, $f(x) = x^{2016} + 2016x$, $f(x) = 2016^x - x^{2016}$,

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$, $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$, $f(x) = x - e^{-x}$, $f(x) = x^{2017} + 2017(x-1) - 1$,

$f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2}$, $f(x) = e^x - x^2$, $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$, $f(x) = e^x(2x^2 - 4x + 5)$, $f(x) = x^2 - x$,

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$, $f(x) = x + 2\ln x$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, $f(x) = \frac{\ln x}{-x}$, $f(x) = e^{-x} + 1$, $f(x) = -e^{-x} + x$,

$f(x) = e^x + 1$, $f(x) = \frac{-e^x}{x^2}$, $f(x) = (x+5)^2 + (x-5)^2$, $f(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$, $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1}$,

$f(x) = x + e\ln x$, $f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x$, $f(x) = \frac{x^4}{4} + \ln x$, $f(x) = e^x + x$, $f(x) = e^x - x + 1$,

$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$, $f(x) = \ln x - 7$, $f(x) = x + \ln x$, $f(x) = x^2 - e^x$, $f(x) = x^{2018}\ln x$, $f(x) = x + \frac{1}{e^x}$,

$f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x-e^x}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $f(x) = (x^2 + 3x - 3)e^x$, $f(x) = \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$,

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $f(x) = \ln x + x + 1$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, $f(x) = x^{2017} - 2017^x$,

$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $f(x) = x^2 - e^x$, $f(x) = (x+1)e^x$, $f(x) = 3x - xe^x$, $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$, $f(x) = x + 2\ln x$,

$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, $f(x) = (x+2)\ln x$, $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \sqrt{x} - x$, $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$,

$f(x) = x^4 + 6x^2 - 18x + 12$, $f(x) = (x^2 + 1)\ln x$, $f(x) = x^5\ln x$, $f(x) = x4^x$, $f(x) = e^x + x - 1$,

$f(x) = e^x + 1$, $f(x) = e^x + ex + 1$, $f(x) = x + 2\ln x$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $f(x) = 2x^3 + 15x^2 - 24x - 1$,

$f(x) = 2^x + x\ln 2$, $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, $f(x) = e^x - \frac{x-1}{x}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$,

$f(x) = x - \frac{3}{x}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, $f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 4$, $f(x) = x^3 - 3x$, $f(x) = \ln x - \frac{x^2}{2}$,

$f(x) = x - \sqrt{x}$, $f(x) = \ln x - 8$, $f(x) = -\frac{3}{x}$, $f(x) = x^3 - \frac{3}{x}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-2}$, $f(x) = (x+1)(x-2)$,

$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, $f(x) = (x+3)\ln x$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$, $f(x) = 2^x - 3^x$, $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$,

$f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$, $f(x) = (x+3)\sqrt{x}$, $f(x) = 3^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \frac{x^2+x-1}{e^x}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^7}$,

$f(x) = x\ln x + x$, $f(x) = x^3 + 3x + 1$, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, $f(x) = 2\sqrt{x} + \ln x$,

$f(x) = x^2 + x - \ln x$, $f(x) = \frac{e^x}{-x}$, $f(x) = (x^2 - 1)e^x - 1$, $f(x) = 2xe^x$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $f(x) = \frac{-x^3}{\ln x}$,

$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $f(x) = x - 2 + 3\sqrt[3]{x}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$,

$f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 4$, $f(x) = x^3 - 3x$, $f(x) = \ln x - \frac{x^2}{2}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$, $f(x) = x^3 - \frac{3}{x}$,

$f(x) = (x-1)(x+2)$, $f(x) = (x+3)\ln x$, $f(x) = x^{2016} - 2016x$, $f(x) = 2016^x + x^{2016}$,

$f(x) = x + 2\ln x + 2017$, $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$, $f(x) = (x+2016)e^x$, $f(x) = (3x+2)e^x$,

$f(x) = x^2 + \ln x + 2016$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$, $f(x) = 7^x - 4^x + 2^x$, $f(x) = x^2 - 8x + 8\ln x + 2 - 8\ln 2$,

$f(x) = x^3e^{-x}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + 4)$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\ln x$, $f(x) = 6x^2 - \ln x$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $f(x) = 4x^2 - \sqrt{x}$, $f(x) =$

$e^x - x - 13$, $f(x) = \frac{x^2+16x+64}{e^x}$, $f(x) = 3x - \ln x^e$, $f(x) = \ln x + \frac{2(x-1)}{x}$, $f(x) = 3\ln x - x^2 - 3x$,

$f(x) = 2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x+1}{x+3} + \frac{x+2}{x+4}$, $f(x) = (x-2)e^x + 2$, $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-7}$.

2.Calculați $f''(x)$ pentru următoarele funcții:

$f(x) = x^3 + 3x$, $f(x) = x^2e^x$, $f(x) = \cos x - \sin x$, $f(x) = x + \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{x} - x$, $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$,
$f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, $f(x) = \frac{\sin x}{1-\sin x}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $f(x) = x^3\ln x$, $f(x) = x\ln x$, $f(x) = 3x^2 + 6x$, $f(x) = x^3 + 5x$,
$f(x) = e^x - x$, $f(x) = 2x + \ln x$, $f(x) = x^2\ln x$, $f(x) = x^3e^x$, $f(x) = (2x + 1)\ln x$,
$f(x) = (x^2 + 1)\ln x$, $f(x) = \cos^2 x$, $f(x) = \sin^3 x$, $f(x) = \cos^4 x$, $f(x) = x\cos x + \sin x$, $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$,
$f(x) = x\sin x - \cos x$, $f(x) = x^3\sqrt{x}$, $f(x) = x\,\mathrm{ctg}\,x$, $f(x) = x\sin x$, $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,
$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$, $f(x) = e^x\sin x$, $f(x) = e^x\cos x$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$,
$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$, $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$, $f(x) = 3\sqrt{x} + 5x$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$,
$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$, $f(x) = x^4\ln x$, $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$, $f(x) = 3x + \ln x$, $f(x) = (x^2 + x + 1)\ln x$,
$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$, $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $f(x) = x\ln x$, $f(x) = (x^2 + x)\ln x$, $f(x) = x^5e^x$,
$f(x) = x^{10} + x^5$, $f(x) = \sin^6 x$, $f(x) = \cos^5 x$, $f(x) = x^3\sin x$, $f(x) = x^2\sin^3 x$, $f(x) = x^3\cos^2 x$,
$f(x) = e^x\ln x$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$, $f(x) = x^2(\sin x - \cos x)$, $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^2 + 2$,
$f(x) = 4\sin x + 3\cos x$, $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$, $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x-3}$, $f(x) = \frac{2+\sin x}{2-\sin x}$, $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x+1}$, $f(x) = \frac{2+\sin x}{2-\sin x}$,
$f(x) = \frac{2-\cos x}{2+\cos x}$, $f(x) = \frac{x+7}{x+6}$, $f(x) = (x + 2)e^x$, $f(x) = (3x - 2)e^x$, $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin x}$.

Derivarea funcțiilor compuse

$((f \circ g)(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tabel de derivate funcții compuse

$(u^2)' = 2u \cdot u'$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(a^u)' = a^u\ln a \cdot u'$	$(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(u^4)' = 4u^3 \cdot u'$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a} \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(u^5)' = 5u^4 \cdot u'$	$(\sqrt[3]{u})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{u^2+1} \cdot u'$
$(u^6)' = 6u^5 \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\frac{1}{u^2+1} \cdot u'$
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	$(e^{-u})' = -e^{-u} \cdot u'$	$(\mathrm{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	

Derivate funcții compuse

3.Calculați derivatele următoarelor funcții:

$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 9} + x)$, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 16} + x)$, $f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 3)$,
$f(x) = \ln(x - 2) + 1 - e^x$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+3}}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$,
$f(x) = \ln(x + 2) - \ln(x - 2)$, $f(x) = \ln(x - 3) + \ln(x + 3)$, , $f(x) = e^x + \ln x^3 + 2$,
$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$, $f(x) = \ln\frac{x+4}{x-4}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}$,
$f(x) = \ln(x + 1) - x$, $f(x) = x + 1 - \ln(x + 2)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$,
$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$, $f(x) = e^{x^2+2x+1}$, $f(x) = e^{x^2+3x+2}$, $f(x) = \sin(x^2 + 3x)$,
$f(x) = \sin(x^2 - 2x)$, $f(x) = \cos(x^2 + 3x)$, $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$, $f(x) = \mathrm{tg}(x^2 + 3x)$,
$f(x) = \mathrm{tg}(x^2 - 2x)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x^2 + 3x)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x^2 - 2x)$, $f(x) = \arcsin(3x)$,

$f(x) = \arcsin(2x), f(x) = \sqrt[3]{x^2+3x+2}, f(x) = \sqrt[3]{x^2-3x+2}, f(x) = (x^2+x+1)^6,$
$f(x) = (x^2-x+1)^8, f(x) = (3x+4)^7, f(x) = (3x-4)^7, f(x) = \sqrt{x^2+2x+3},$
$f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}, f(x) = e^{x^3}, f(x) = \sin e^x, f(x) = \cos e^x, f(x) = tg e^x, f(x) = ctg e^x, f(x) = \frac{1}{x-3} + \ln\frac{x-2}{x},$
$f(x) = \sqrt{x^4-x^2+4}, f(x) = 4 - \frac{2}{x+1} - \ln\frac{x}{x+1}, f(x) = x^4e^{-x}, f(x) = x - \ln(x^2+x+2),$
$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x + 2, f(x) = 2x^3+3x^2+6x-6\ln(x-1), f(x) = \ln(\sqrt{x^2+49}+x),$
$f(x) = x\ln(x+3), f(x) = x^2 - 4\sqrt{x^2-2}, f(x) = x\sqrt{x^2+4x+4}, f(x) = 2-2x+2\ln(x+1).$

Limitele unor funcții

Funcțiile cu nume se numesc funcții elementare,o să numim funcții elementare și operațiile cu aceste funcții cu nume.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție elementară și $a\in D \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$, $\ln 0^+ = -\infty$, $\ln\infty = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{c}{\infty} = 0$

Pentru $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\left(c+\frac{d}{x}\right)} = \frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a}{c}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}} = \frac{a}{d}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}} = \frac{a}{d}.$$

Pentru calculul unor limite de funcții utilizăm și regula lui l'Hospital, pe care o expunem pe pagina următoare.

Continuitate

Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$, a punct de acumulare pentru D

f este continuă în a $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$

f este continuă în a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$, a punct izolat pentru $D \Rightarrow$ f continuă în a.

Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval atunci ea păstrează semn constant pe acel interval.

Fie I interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.Dacă $f(x) \neq 0 \forall x\in I \Rightarrow f(x) > 0 \forall x\in I$ sau $f(x) < 0 \forall x\in I$.

Fie $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.Dacă $\varphi(a)\varphi(b) < 0$ atunci există cel puțin un $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi(c) = 0$.

Fie $\varphi:(a,b) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.Dacă $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \varphi(x) \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \varphi(x) < 0$ atunci există cel puțin un $c\in(a,b)$ astfel încât $\varphi(c) = 0$.

Asimptote

Asimptote verticale

Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$, a punct de acumulare pentru D

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\in\{\pm\infty\} \Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la stânga la $\mathcal{G}_f$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\in\{\pm\infty\} \Leftrightarrow$ d:x=a este asimptotă verticală la dreapta la $\mathcal{G}_f$

Dacă dreapta d:x=a este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta atunci spunem că d:x=a este asimptotă verticală bilaterală la $\mathcal{G}_f$

$\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\ln 0^+ = -\infty$, $\ln\infty=\infty$

Asiptote orizontale

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ d:y=k este asimptotă orizontală spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ d:y=k este asimptotă orizontală spre $-\infty$

Asimptote oblice

Dacă $\exists m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ şi $\exists n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R} \Rightarrow$ d:y=mx+n asimptotă oblică spre $+\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Dacă $\exists m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}^*$ şi $\exists n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)\in\mathbb{R} \Rightarrow$ d:y=mx+n asimptotă oblică spre $-\infty$ la $\mathcal{G}_f$

Derivată unei funcţii într-un punct,ecuaţia tangentei,derivata de ordin doi

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Ex.Fie $f(x) = x^3 - 2x$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

$f'(x) = 3x^2 - 2$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3-2 = 1$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0)$, $f''(x) = (f'(x))'$

Dacă $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A(x_0, f(x_0))$ este $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$,iar panta tangentei este $m=f'(x_0)$

Dacă $f'(x_0)\in\{\pm\infty\}$ atunci ecuaţia tangentei la $\mathcal{G}_f$ în $A(x_0, f(x_0))$ este $x = x_0$

Regula lui l'Hospital

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Rolul derivatei de ordin 1 şi 2 în studiul funcţiilor

Fie M un interval şi f o funcţie

dacă $f'(x) > 0$ $\forall x\in M \Rightarrow$ f este strict crescătoare pe M

dacă $f'(x) \geq 0$ $\forall x\in M \Leftrightarrow$ f este crescătoare pe M

dacă $f'(x) < 0$ $\forall x\in M \Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe M

dacă $f'(x) \leq 0$ $\forall x\in M \Leftrightarrow$ f este descrescătoare pe M

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + +$
$f(x)$	$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$ $f(x_0)$ $\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$

$\Rightarrow x_0$ este punct de minim local al lui f , $f(x_0)$ este valoare minimă locală a lui f

Pentru

x	x_0
$f'(x)$	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ $f(x_0)$ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘

$\Rightarrow x_0$ este punct de maxim local al lui f , $f(x_0)$ este valoare maximă locală a lui f

Fie M un interval și f o funcție

dacă $f''(x) \geq 0\ \forall x \in M \Leftrightarrow$ f este convexă pe M

dacă $f''(x) \leq 0\ \forall x \in M \Leftrightarrow$ f este concavă pe M

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	− − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	concavă $f(x_0)$ convexă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune a lui f

Pentru

x	x_0
$f''(x)$	+ + + + + + + + + 0 − − − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	convexă $f(x_0)$ concavă

$\Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune al lui f

Subiectul III1 (prelucrări bacalaureat)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 - 4x + 4\ln(x+1)$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4x}{x+1}, x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $\ln(1+\sin x) \leq \sin x$, pentru orice $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 1 - 5x + 5\ln(x+1)$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-5x}{x+1}, x\in(-1,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $\ln(1+\sin x) \leq \sin x$, pentru orice $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+12x+36}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+4)(x+6)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $0 \leq (x+6)(y+6) \leq 4e^{\frac{x+y+8}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-6,+\infty)$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+10x+25}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+3)(x+5)}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $0 \leq (x+5)(y+5) \leq 4e^{\frac{x+y+6}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-5,+\infty)$.

5.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\ln x^{2e}-2x$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{2e-2x}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu Ox.
c)Demonstrați că ecuația $x^{2e}=e^{2x}$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
6.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=2x-\ln x^{2e}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{2x-2e}{x}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu Ox.
c)Demonstrați că ecuația $e^{2x}=x^{2e}$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
7.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{4(x-1)}{x}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x-4}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=\frac{1}{3}\cdot x$.
c)Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.
8.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{5(x-1)}{x}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x-5}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=\frac{1}{4}\cdot x$.
c)Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.
9. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=3-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\leq 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
10. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=4-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\leq 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
11. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+4}{x+5}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+5)^2}, x\in(-1,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați imaginea funcției f.
12. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x+2}+\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+2}{x+4}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x+3)^2}+\frac{2}{(x+4)^2}, x\in(-2,+\infty)$.

b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați imaginea funcției f.
13.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x + 4$.
a) Arătați că $f'(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\sqrt[n]{e} \leq \frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, n≥2.
14.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x - 1$.
a) Arătați că $f'(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $\sqrt[n]{e} \leq \frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, n≥2.
15.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x^2+5}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(1-x)(x+5)}{(x^2+5)^2}, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt[3]{3})$.
16.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x^2+15}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(3-x)(x+5)}{(x^2+15)^2}, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0, situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt[3]{3})$.
17.Se consideră funcția $f:(4,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x-4}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-5)}{(x-4)^2}, x \in (4,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că $e^{x-5} - x + 4 \geq 0$,pentru orice $x \in (4,+\infty)$.
18.Se consideră funcția $f:(3,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x-3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}, x \in (1,+\infty)$.
b)Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
c)Demonstrați că $e^{x-4} - x + 3 \geq 0$,pentru orice $x \in (3,+\infty)$.
19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2 - 10x + 25)$.
a)Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 - 8x + 15), x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.
c)Demonstrați că $(x-5)^2 \leq 4e^{3-x}$,pentru orice $x \in (-\infty, 5]$.
20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2 + 6x + 9)$.
a)Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 + 8x + 15), x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.
c)Demonstrați că $(x+3)^2 \leq 4e^{-5-x}$,pentru orice $x \in (-\infty, -3]$.
21.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{x} + \ln x$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}, x \in (0,+\infty)$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că $\frac{4}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 4$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

22.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{x} + \ln x$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{x-5}{x^2}, x \in (0, +\infty)$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1, situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că $\frac{5}{x} + \ln x \geq 1 + \ln 5$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2019}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+2018)}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că funcția f este concavă pe$(-\infty, -2017]$.

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-2017}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x-2018)}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.

c)Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2019, +\infty)$.

25.Se consideră funcția $f:(-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, x \in (-1, +\infty)$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul fucției f.

c)Demonstrați că $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x+1} = 0$.

26.Se consideră funcția $f:(3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-3x+9}{x-3}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-1)^2}, x \in (3, +\infty)$.

b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=4,situat pe graficul fucției f.

c)Demonstrați că $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x+1} = 0$.

27.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 6\ln x$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{6(x-1)(x^2+x+1)}{x}, x \in (0, +\infty)$.

b)Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

c)Demonstrați că $f(x) \geq 2$,pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

28.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 81\ln x$.

a)Arătați că $f'(x) = \frac{3(x-3)(x^2+3x+9)}{x}, x \in (0, +\infty)$.

b)Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

c)Demonstrați că $f(x) \geq 27\ln\frac{e}{27}$,pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

29. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=x^4\ln x$.

a)Arătați că $f'(x) = x^3(4\ln x + 1), x\in(0,+\infty)$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucției f.
c)Demonstrați că $1+4ef(x) \geq 0$,pentru orice număr real $x, x\epsilon(0,+\infty)$.
30. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x^2$.
a)Arătați că $f'(x) = 2x(2\ln x + 1), x\in(0,+\infty)$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul fucției f.
c)Demonstrați că $1+ef(x) \geq 0$,pentru orice număr real $x, x\epsilon(0,+\infty)$.
31.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3^x - x\ln 3 - 1$.
a)Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
b)Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
c)Demonstrați că $3^x \geq x\ln 3 + 1$,pentru orice număr real x.
32.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 10^x - x\ln 10 - 1$.
a)Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
b)Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.
c)Demonstrați că $10^x \geq x\ln 10 + 1$,pentru orice număr real x.
33.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5e^x + x^2$.
a) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 5$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
34.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 6e^x + x^2$.
a) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 6$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
35.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - \ln x + 4x$.
a)Arătați că $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e + 3$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
36.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - \ln x + 6x$.
a)Arătați că $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e + 5$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=1,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
37.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 32x^2 + 40$.
a)Arătați că $f'(x) = 4x(x-4)(x+4), x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+2}$.

c)Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f ,în care tangenta la graficul funcție f este paralelă cu axa Ox.
38.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 18x^2 + 27$.
a)Arătați că $f'(x) = 4x(x-3)(x+3), x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+3}$.
c)Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f ,în care tangenta la graficul funcție f este paralelă cu axa Ox.
39.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+3)e^x$.
a) Arătați că $f'(x) = (x+4)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe $[-5,+\infty)$.
40.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^x$.
a) Arătați că $f'(x) = (x+3)e^x, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este concavă pe $(-\infty, -4]$.
41.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x - e^x + 5$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
42.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x - e^x + 7$.
a)Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
43.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\ln x - x + 5$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x) = 5$.
b)Arătați că $f'(x) = \ln x, x\in(0,+\infty)$.
c)Arătați că $f(x) \geq 4$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.
44.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\ln x - x + 7$.
a)Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x) = 7$.
b)Arătați că $f'(x) = \ln x, x\in(0,+\infty)$.
c)Arătați că $f(x) \geq 6$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.
45. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+36}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{(6-x)(6+x)}{(x^2+36)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 6$ situat pe graficul funcției f.
c)Determinați punctele de extrem ale funcției f.
46. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+16}$.
a) Arătați că $f'(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{(x^2+16)^2}, x\in\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$ situat pe graficul funcției f.

c)Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

47.Se consideră funcţia $f:(-\infty,4)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-4}$.

a)Calculaţi $\lim_{x\to 3} f(x)$.

b)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(3-x)e^{-x}}{(x-4)^2}$, $x\in(-\infty,4)$.

c)Arătaţi că $f(x)\le -\frac{1}{e^3}$ pentru orice $x\in(-\infty,4)$.

48.Se consideră funcţia $f:(-\infty,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-5}$.

a)Calculaţi $\lim_{x\to 4} f(x)$.

b)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(4-x)e^{-x}}{(x-5)^2}$, $x\in(-\infty,5)$.

c)Arătaţi că $f(x)\le -\frac{1}{e^4}$ pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

49.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$.

a) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

50.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

a) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

51.Se consideră funcţia $f:(-\infty,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-3}$.

a)Calculaţi $\lim_{x\to 2} f(x)$.

b)Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2-x)e^{-x}}{(x-3)^2}$, $x\in(-\infty,3)$.

c)Arătaţi că $f(x)\le -\frac{1}{e^2}$ pentru orice $x\in(-\infty,3)$.

52.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

a) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că $f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

53.Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x$.

a)Calculaţi $\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$.

b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctulde abscisă x=e, situat pe graficul funcţiei f.

c)Demonstraţi că $f(x)\ge 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

54. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+2)-\ln(x+1)$.

a)Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

b)Arătați că funcția f este descrescătoare.
c)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+1)f(x)\right)$.
55.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-8x+16)$.
a)Arătați că $f'(x)=e^x(x^2-6x+8)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
b)Verificați dacă $f(x)+f''(x)=2(f'(x)+e^x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
c)Determinați punctele de extrem ale funcției f.
56.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3e}{x}+\ln x$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{x-3e}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați punctele de extrem ale funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe $(0,6e)$.
57. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3\cdot\ln x$.
a)Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$.
c)Demonstrați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
58. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x\ln x$.
a)Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.
c)Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.
59.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$.
a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstați că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
d)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=e$,situat pe graficul funcției f.
60. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$.
a)Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
c)Determinați punctele de extrem ale funcției f.
61.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.
a)Calculați $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=3$,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.
62. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$.
a)Arătați că dreapta de ecuație $x=3$ e asimptotă verticală la graficul funcției f.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-16}{x-4}$.
c)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcției f.
63.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+2$.

a)Arătaţi că $\lim\limits_{x \to e} f(x) = 2$.
b)Arătaţi că $f'(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$.
c)Arătaţi că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
64. Se consideră funcţia $f:(2, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
a)Arătaţi că dreapta de ecuaţie x=2 e asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-9}{x-3}$.
c)Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$,la graficul funcţiei f.
65.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - xe^x + 2$.
a)Calculaţi $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
66. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+\ln x}{x}$.
a)Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x \in (0, +\infty)$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
67. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^x$.
a) Arătaţi că $f'(x) = (x+3)e^x, x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe $[-4, +\infty)$.
d)Arătaţi că funcţia f este concavă pe $(-\infty, -4]$.
68. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2xe^x - 2e^x + 3$.
a)Calculaţi $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
b)Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c)Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
69. Se consideră funcţia $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - \ln x + 2x$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x \to e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = e^e - \frac{1}{e} + 2$.
b)Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=e,situat pe graficul funcţiei f.
c)Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
70. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.
a)Arătaţi că $f'(x) = 4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}), x \in \mathbb{R}$.
b)Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^4}{x^2+3}$.
c)Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f ,în care tangenta la graficul funcţie f este paralelă cu axa Ox.
71.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 1$.
a)Arătaţi că $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e - 1$.
b)Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
c)Demonstraţi că $x + 1 \leq e^x$,pentru orice număr real x.
72.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4e^x + x^2$.

a) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 4$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este crescătoare pe $[0,+\infty)$.
d)Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
73.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 81\ln x$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{3(x^3-27)}{x}, x\epsilon(0,+\infty)$.
b)Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) \geq 27(1-\ln 27)$,pentru orice $x\epsilon(0,+\infty)$.
74. Se consideră funcția $f:(-\infty,3)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+2x-11}{x-3}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}, x\epsilon(-\infty,3)$.
b)Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Arătați că $f(-\pi) < \frac{4}{3}$.
75. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = xe^x, x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(x) \geq -1$, pentru orice număr real x.
76. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (2-x)e^x$.
a)Arătați că $f'(x) = (1-x)e^x, x\epsilon\mathbb{R}$.
b)Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f'(x) \leq 1$, pentru orice număr real x.
77. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{mx^2+4x-9m}{x-3}$,unde m este număr real.
a)Arătați că dreapta de ecuație x=3 este asimptotă verticală la graficul funcției f,pentru orice număr real m.
b)Determinați numărul real m pentru care dreapta de ecuație y=4 e asimptotă orizontală la graficul funcției $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
c) Pentru m=1 ,calculați $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-23}{x-4}$.
78. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 5e^x + x^2$.
a) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 5$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=0,situat pe graficul funcției f.
c)Arătați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
79.Se consideră funcția $f:(-\infty,4) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-4)^2}, x\epsilon(-\infty,4)$.
b)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x=−6,situat pe graficul funcției f.
c)Demonstrați că $f(e) < 2$.
80.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3\ln x$.
a)Arătați că $f'(x) = \frac{x-3}{x}, x\epsilon(0,+\infty)$.

b)Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
c)Demonstrați că $3\ln x-3\ln 3\leq x-3$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
81.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-8$.
a)Arătați că $f'(0)=0$.
b)Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.
c)Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.
82.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-13$.
a)Arătați că $f'(0)=0$.
b)Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.
c)Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.
83.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2+2x+4}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}}, x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstrați că, pentru orice număr real a,ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.
84.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2-2x+4}$.
a) Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}, x\in\mathbb{R}$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
c) Demonstrați că, pentru orice număr real a,ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.
85. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\sqrt{x^2-4}-x^2+3$.
a) Arătați că $f'(x)=2x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}-1\right), x\in(2,+\infty)$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+f(x)-3}{x}$.
c)Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.
86. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-4}-3$.
a) Arătați că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right), x\in(2,+\infty)$.
b)Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)-3}{x}$.
c)Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.
87. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln(2+x)$.
a) Arătați că $f'(x)=\ln(2+x)+\frac{x}{2+x}, x\in(-2,+\infty)$.
b)Arătați că funcția f este convexă .
c)Se consideră funcția $g:(-2,-1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2+x)^x$.Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-2,-1]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.
88. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln(x+2)$.
a) Arătați că $f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}, x\in(-2,+\infty)$.
b)Arătați că funcția f este convexă .
c)Se consideră funcția $g:(-2,-1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+2)^x$.Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-2,-1]$ astfel încât $x_1\leq x_2$,atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.

Tabel de integrale nedefinite

$\int dx = \int 1\,dx = x + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}x + C$
$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \mathrm{tg}x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \mathrm{ctg}x\,dx = -\ln\lvert\sin x\rvert + C$	

Integrala nedefinită,primitive

Fie $f, F: I \to \mathbb{R}$ două funcții și I un interval.

F se numește primitivă a lui f $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{F este derivabilă} \\ F' = f, (F'(x) = f(x), \forall x \in I) \end{cases}$

$\int f(x)\,dx = \{F(x) | \text{F este primitivă a lui f}\}$ se numește mulțimea primitivelor funcției f

$\mathcal{C} = \{k: I \to \mathbb{R} | k(x) = k \forall x \in \mathbb{R}\}$ se numește mulțimea funcțiilor constante

Dacă F este o primitivă a lui f atunci $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}$

$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathcal{C}$

$\int f''(x)\,dx = f'(x) + \mathcal{C}$

Proprietăți pentru integrala nedefinită

$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\quad \int \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ $\quad \int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Primitive

1.Calculați următoarele integrale nedefinite:

$\int dx$, $\int \frac{5}{4}\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{x^6}\,dx$, $\int (3x+1)^2\,dx$, $\int x(2-x)^2\,dx$, $\int \sqrt[4]{x}\,dx$, $\int \sqrt[5]{x}\,dx$,

$\int \left(-3x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}\right) dx$, $\int \frac{4x^3 - 5x + 6}{x^5}\,dx$, $\int x\left(3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}\right) dx$, $\int \frac{4x-1}{x^5}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}\right) dx$,

$\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+36}\,dx$, $\int \frac{1}{25-x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2+9} - \frac{3}{9-x^2}\right) dx$, $\int \frac{(x^2-4)(x^2-5)}{x}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+6}\,dx$,

$\int \frac{(x^2-1)(3x+2)}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int (-3\sin x + 4\cos x)\,dx$, $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx$, $\int (\mathrm{ctg}x + 3\mathrm{tg}x)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$,

$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right) dx$, $\int (3^x + 4^{x+1} + 5^{x+2})\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{3+x^2} + \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$,

$\int \frac{dx}{6+5x^2}$, $\int \frac{dx}{6-5x^2}$, $\int \frac{dx}{5x^2-6}$, $\int (3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2)\,dx$, $\int (x^2 - 3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{5}{x}\right) dx$,

$\int \left(5x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt[4]{x^3}\right) dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}} - 12x^4 \cdot \sqrt[4]{x}\right) dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$, $\int \frac{10}{25x^2-9}\,dx$, $\int \frac{8}{16x^2+1}\,dx$,

$\int \frac{25}{5x^2+125}\,dx$, $\int (6^x \ln 6 - 5^x \ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-45}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}\,dx$, $\int (x^8 - 5)\,dx$,

$\int (5\sin x + 6\cos x)\,dx$, $\int \left(4\sin^2 x - \sqrt[3]{-64}\cos^2 x\right) dx$, $\int 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$, $\int 10\cos^2\frac{x}{2}\,dx$,

$\int 10\sin^2 x\,dx$, $\int (6x^5-3x^4+2x-9)\,dx$, $\int (7x^2-4x+2)\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-49}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-49}}\,dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+49}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+49}}\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$,

$\int \sin x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \cos x\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, $\int 9^x\,dx$, $\int 7^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-64}\,dx$,

$\int x^{14}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-64}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+64}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+64}}\,dx$, $\int x^{15}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+81}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+81}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-81}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-81}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}\,dx$, $\int 8^x\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^8\,dx$, $\int 10^x\,dx$, $\int x^{17}\,dx$, $\int 17^x\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+100}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-100}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2-100}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$, $\int 13^x\,dx$, $\int x^{13}\,dx$, $\int x^9\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-7}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+10}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-10}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-10}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{10-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$, $\int x^6\,dx$, $\int 9x^8\,dx$, $\int x^{\frac{5}{6}}\,dx$, $\int \sqrt[6]{x^5}\,dx$, $\int x^{-\frac{7}{2}}\,dx$, $\int 13x\sqrt[5]{x^4}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$, $\int e^x\,dx$, $\int 6^x\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-16}\,dx$, $\int \frac{1}{25+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{(x-5)(x+5)}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}\,dx$, $\int \frac{1}{(5-x)(5+x)}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2-6}\,dx$, $\int \frac{1}{6-x^2}\,dx$,

$\int \frac{1}{x^2+6}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}}\,dx$, $\int (2x^5+3x^4-4x^3+2x-3)\,dx$, $\int (\sin x+x)\,dx$,

$\int \frac{4x^4-3x^3+x^2+3x+2}{x^3}\,dx$, $\int \left(\frac{2}{6+x^2}+\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (2\sin x+3\cos x)\,dx$, $\int \left(3e^x-\frac{4}{x}+3\cdot 5^x\right)dx$,

$\int \left(\frac{6}{25x^2-9}-\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}\right)dx$, $\int (x^3\cdot\sqrt[3]{x}+3x\cdot\sqrt{x^5})\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-25}+5}{x^2-25}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx$,

$\int (3x^6-5x^4+2x^3+3x-2)\,dx$, $\int \frac{3x^4+4x^3-x^2+2x+3}{x^2}\,dx$, $\int \left(\frac{3}{7+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)dx$, $\int (1-\sin x)\,dx$,

$\int (2\cos x+3\sin x)\,dx$, $\int \left(3\cdot e^x-\frac{2}{x}+4\cdot 3^x\right)dx$, $\int \left(\frac{6}{16x^2-9}-\frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\right)dx$, $\int (x+\mathrm{tg}x)\,dx$,

$\int (x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2x\cdot\sqrt{x^3})\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-16}+4}{x^2-16}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}\,dx$, $\int (6x^4-5x^3+4x^2-4x+2)\,dx$,

$\int (x^2-3x)^3\,dx$, $\int \left(\frac{5}{x^3}-\frac{7}{x^5}-\frac{6}{x}\right)dx$, $\int (9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3})\,dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-31x^5\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$,

$\int \frac{20}{4x^2-9}\,dx$, $\int \frac{3}{9x^2+1}\,dx$, $\int \frac{10}{5x^2+125}\,dx$, $\int (7^x\cdot\ln 7-5^x\cdot\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{7x^2+28}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}\,dx$, $\int (5\sin x+3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin x-3\cos x)\,dx$, $\int (5\sin^2 x-\sqrt[3]{-125}\cos^2 x)\,dx$,

$\int e^x\left(3+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$, $\int 3^x\left(3^{-x}+3^{-x}\cdot x^3+6+5^x+\frac{3^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$, $\int \frac{6x^5+x^2-x+1}{x^3}\,dx$, $\int \frac{4x^3-x^4}{\sqrt{x}}\,dx$,

$\int \left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{x^2-6}+\frac{3}{\sqrt{x^2-6}}\right)dx$, $\int \left(\frac{5}{x^2-4}-\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$,

$\int \left(\frac{5}{x^2+4}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}+\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{6-x^2}-\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{36-x^4}}\,dx$, $\int (x^4-5x^3+2x^2+x-3)\,dx$,

$\int \left(3x^2-6x+\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^3-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^3}\right)dx$, $\int (5\sqrt[6]{x}-3\sqrt[4]{x}+4x-2\sqrt{x})\,dx$, $\int \left(x^4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)dx$,

$\int (x^5-3x^2+2x-6)\,dx$, $\int \left(5x^2-7x+\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \left(x^4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\right)dx$, $\int (3x\sqrt{x}-4x\sqrt[3]{x^2})\,dx$,

$\int \left(6\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}+3x^2-5+\frac{6}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^3}\,dx$, $\int \frac{\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\,dx$, $\int (x^2-3e^x)\,dx$, $\int (x^5+2e^x)\,dx$,

$\int \left(6^x-\frac{1}{x^3}+e^x+\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{(x^2+5)^2}{x^3}\,dx$, $\int \frac{(x^2-4)^2}{x^4}\,dx$, $\int \frac{(x^2-2)^2}{x^5}\,dx$, $\int (4x^2\sqrt{x}-3x^4\sqrt[3]{x^5})\,dx$,

$\int \frac{\cos^3 x+4}{\cos^2 x}\,dx$, $\int (x^2-3x+5+2e^x)\,dx$, $\int (x^6-8x^2+3x+7+3e^x)\,dx$, $\int \left(\frac{3-2x}{x}\right)^2 dx$,

$\int \left(7^x-\frac{1}{x^4}+2e^x-\frac{1}{x}\right)dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+25}}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2+25}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$,

$\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$, $\int \frac{(x-2)^3}{x^3}\,dx$, $\int \frac{(x+2)^3}{x^4}\,dx$, $\int \left(-\frac{5}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right) dx$,

$\int 4^x\left(1-\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right) dx$, $\int \frac{xe^x-5x}{x}\,dx$, $\int \frac{x\cdot 7^x-7x}{x}\,dx$, $\int e^x\left(4+\frac{5e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$, $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{\sin^2 x}\right) dx$,

$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}\,dx$, $\int (x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x})\,dx$, $\int \left(4x-\frac{2}{x}+\sqrt{x}\right) dx$, $\int \left(3x+\frac{5}{x^2}\right) dx$, $\int \left(5x-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x}\right) dx$,

$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}\,dx$, $\int \frac{x-5}{x^3}\,dx$, $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}\,dx$, $\int (x^2\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[4]{x})\,dx$, $\int 7^x\left(3-4^x+\frac{7^{-x}}{x^5}-\frac{7^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$,

$\int 4^x\left(2-3^x+4^{-x}\cdot x^5+\frac{4^{-x}}{x^5}+\frac{4^{-x}}{\sin^2 x}\right) dx$, $\int (6x^4-5x^3+4x^2-5x+2)\,dx$, $\int (x^2-3x)^3\,dx$,

$\int (3x^4+6x^3-5x^2+4x-1)\,dx$, $\int \left(\frac{4}{x^3}-\frac{6}{x^5}-\frac{4}{x}\right) dx$, $\int (9x^2\sqrt{x}+6x\sqrt[4]{x^3})\,dx$,

$\int (5x^3\sqrt{x}+2x\sqrt[4]{x})\,dx$, $\int (x^2+2x)^3 dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^8}}-32x^5\cdot\sqrt[5]{x}\right) dx$, $\int \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^6}}-14x^5\cdot\sqrt[4]{x}\right) dx$,

$\int \frac{1}{9x^2-1}\,dx$, $\int \frac{15}{25x^2-9}\,dx$, $\int \frac{1}{9x^2+1}\,dx$, $\int \frac{15}{25x^2+9}\,dx$, $\int \frac{1}{16x^2-1}\,dx$, $\int \frac{20}{16x^2-25}\,dx$, $\int \frac{27}{9x^2+1}\,dx$, $\int \frac{8}{4x^2+64}\,dx$,

$\int (6^x\ln 6-5^x\ln 25)\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+20}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-27}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20-5x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6x^2+54}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6x^2-54}}\,dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+64}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-100}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7x^2+28}}\,dx$, $\int (5\sin x+3\cos x)\,dx$, $\int (3\sin^2 x-\sqrt[3]{-27}\cos^2 x)\,dx$,

$\int (4\cos^2 x-\sqrt[3]{-64}\sin^2 x)dx$, $\int 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$, $\int 4\cos^2\frac{x}{2}\,dx$, $\int 4\sin^2\frac{x}{2}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}}\,dx$,

$\int \frac{6x^5+3x^4+2x^3-5x^2+3x-4}{x^3}\,dx$, $\int \frac{6x^3-x^5}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int \frac{x\sqrt[4]{x}+3x^2\cdot\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int \left(\frac{1}{5+x^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right) dx$, $\int \frac{(x-1)^4}{x^3}\,dx$,

$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2-9}+9}{x^2-9}\,dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-1}{x^2+9}\,dx$, $\int (7^x\ln\sqrt[3]{49}-\ln 5\cdot 25^x)\,dx$.

Integrala definită,proprietăți pentru integrala definită

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa , atunci

$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$ se numește integrala definită a funcției f .

$\int_a^b f'(x)\,dx=f(x)\big|_a^b=f(b)-f(a)$

$\int_a^b f''(x)\,dx=f'(x)\big|_a^b=f'(b)-f'(a)$

$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$, $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$,

$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$

Integrale definite

1.Calculați următoarele integrale definite:

a) $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_1^3 x\,dx$, $\int_0^1 (x+1)\,dx$, $\int_1^2 (x+2)\,dx$, $\int_{-1}^1 (x^3+3x)\,dx$, $\int_0^1 (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$,

$\int_0^1 x\,dx$, $\int_0^{2014} dx$, $\int_0^2 x^2\,dx$, $\int_0^1 \frac{-2x^2}{x^2+1}\,dx$, $\int_2^3 (x+1)dx$, $\int_1^2 x\,dx$, $\int_0^1 (3x+1)\,dx$, $\int_1^2 2x\,dx$,

$\int_1^2 (2x+3)\,dx$, $\int_0^1 x^3\,dx$, $\int_0^3 x\,dx$, $\int_0^1 (x+4)\,dx$, $\int_1^2 (x-2)\,dx$, $\int_{-1}^1 (x^3-3x)\,dx$,

$\int_0^1 (4x^3-3x^2+2x-1)\,dx$, $\int_0^1 4x\,dx$, $\int_1^{2016} dx$, $\int_0^1 x^{2016}\,dx$, $\int_2^3 \frac{-2x^2}{x^2-1}\,dx$, $\int_2^3 (x-1)dx$, $\int_2^3 x\,dx$,

$\int_0^1 (3x-4)\,dx$, $\int_1^2 5x\,dx$, $\int_1^2 (2x-3)\,dx$.

b) $\int_1^2 xe^x dx$, $\int_1^2 \ln x\,dx$, $\int_1^e x^3\ln x\,dx$, $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, $\int_0^1 \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$, $\int_2^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$,

$\int_0^1 (3x+1)e^x\,dx$, $\int_0^1 (x^2e^x-2x)\,dx$, $\int_0^1 xe^x dx$, $\int_1^e \ln x\,dx$, $\int_e^{e^2} x^3\ln x\,dx$, $\int_1^{e^2} x^2\ln x\,dx$, $\int_1^2 \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$,

$\int_1^e x\ln x\,dx$, $\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1 (3x-1)e^x\,dx$, $\int_0^1 (x^2e^x+2x)\,dx$,

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx, \int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx, \int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)dx, \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx, \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx, \int_2^4 \frac{1}{x+1}dx, \int_2^3 \frac{x^3-1}{x^2-1}dx, \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx,$
$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1}dx, \int_2^3 \frac{x^3-3x}{x^2-1}dx, \int_2^3 \left(x^2+\frac{x}{x-1}\right)dx, \int_0^1 \frac{1}{x-2}dx, \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx, \int_2^4 \frac{1}{x-1}dx, \int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-1}dx, \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx.$

Inegalități integrale

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă și $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă și $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$ atunci
$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Dacă $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue și $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Metoda integrării prin părți

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Metoda schimbării de variabilă

$\int_a^b ((f \circ g)(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă f este impară } (f(x) = -f(x) \forall x \in [-a,a]) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{ dacă f este pară } (f(-x) = f(x)) \end{cases}$$

Arii,volume

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă și $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ atunci aria subgraficului funcției f sau aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox și dreptele de ecuații x=a și x=b este
$\mathcal{A}_{\Gamma_f} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă $\forall x \in [a,b]$ atunci aria domeniului plan mărginit de $\mathcal{G}_f$,axa Ox și dreptele de ecuații x=a și x=b este $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă și $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ atunci volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției f este $\mathcal{V}_{C_f} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

Subiectul III2 (prelucrări bacalaureat)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+5}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x \, dx = 10$.

b) Demostrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-5, +\infty)$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu $6-8e^{-n}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+6}{e^x}$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x \, dx = 12$.

b) Demostrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-6, +\infty)$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu $7-10e^{-n}$.

3. Se consideră funcția $f:(-3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x+3}$.

a) Arătați că $\int_{0}^{2} (x+3)f(x) \, dx = 4$.

b) Arătați că funcția $F: (-3, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 27\ln(x+3)$ este o primitivă a funcției f.

c) Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x^3} f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x= a^2$ are aria egală cu $\ln 13$.

4. Se consideră funcția $f:(-4, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x+4}$.

a) Arătați că $\int_{0}^{2} (x+4)f(x) \, dx = 4$.

b) Arătați că funcția $F: (-4, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 16x - 64\ln(x+4)$ este o primitivă a funcției f.

c) Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x^3} f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 17$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-3)(x+3)e^x$.

a) Arătați că $\int_{0}^{3} \frac{f(x)}{e^x} \, dx = -18$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=3$ și $x=4$.

c) Determinați numărul real a, $a>4$, știind că $\int_{4}^{a} \frac{2xe^x}{f(x)} \, dx = \ln 13$.

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-4)(x+4)e^x$.

a) Arătați că $\int_{0}^{3} \frac{f(x)}{e^x} \, dx = -39$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=4$ și $x=5$.

c) Determinați numărul real a, $a>5$, știind că $\int_{5}^{a} \frac{2xe^x}{f(x)} \, dx = \ln 17$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=x^2 + 3$.

a) Arătați că $\int_{0}^{3} f(x) \, dx = 18$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c)Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt = x$

8.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4$.

a)Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx = 21$.

b)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1.

c)Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt = x$

9. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+4}$.

a)Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x)\,dx = 46$.

b)Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+4}\right) e^{x^3}\,dx$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

10. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+3}$.

a)Arătați că $\int_0^2 (x+3)f(x)\,dx = 36$.

b)Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+3}\right) e^{x^3}\,dx$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - 3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

11. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 2 + 3\ln x$.

a)Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3\ln x)\,dx = 12$.

b)Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{3e^2+4e}{2}$.

c) Determinați numărul real a,a>1, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=a are aria egală cu $a^3 + a^2 + 2a - 3$.

12. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 1 + 2\ln x$.

a)Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 2\ln x)\,dx = 11$.

b)Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{3e^2+4e-3}{2}$.

c) Determinați numărul real a,a>1, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=a are aria egală cu $a^3 + a^2 + 2a - 1$.

13. Se consideră funcția $f:[4,+\infty) \to\mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x-4}$.

a)Arătați că $\int_4^5 f(x)\sqrt{x-4}\,dx = \frac{7}{3}$.

b)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to\mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x+4)}{x+4} \cdot \sqrt{e^x}$ este egal cu π.

c)Calculați $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_5^x f(t)\frac{1}{\sqrt{t-4}}dt}{x^2}$.

14. Se consideră funcția $f:[5,+\infty) \to\mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x-5}$.

a)Arătați că $\int_5^6 f(x)\sqrt{x-5}\,dx = \frac{17}{6}$.

b)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to\mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x+5)}{x+5} \cdot \sqrt{e^x}$ este egal cu π.

c)Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_5^x f(t)\frac{1}{\sqrt{t-5}}dt}{x^2}$.

15. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\,dx = \frac{9}{2}$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

c)Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=n are aria egală cu $2e^n$.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^3 \frac{xf(x)}{e^x}\,dx = 18$.

b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

c)Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=n are aria egală cu $4e^n$.

17.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$.

a)Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

b)Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{2}$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

18.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

a)Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

b)Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{2}$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 6x + 1, x\epsilon(-\infty, 1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\epsilon[1, +\infty) \end{cases}$.

a)Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b)Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx = 2\left(\frac{14}{3} - \sqrt{e}\right)$.

c)Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}} f^2(x)\,dx = \frac{19}{3}$.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2, x\epsilon(-\infty, 1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\epsilon[1, +\infty) \end{cases}$.

a)Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b)Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx = 2(4 - \sqrt{e})$.

c)Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+4}} f^2(x)\,dx = 21$.

21. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2}{2x}$.

a)Arătați că $\int_1^2 2xf(x)\,dx = \frac{2}{3}$.

b)Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(1) = 3$.

c)Demonstrați că $2\int_1^n \left(f(x) + xf'(x)\right)dx = n^2 - 1$, pentru orice număr natural n, n≥2.

22. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+2}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{13}{3}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(1) = 2$.

c) Demonstrați că $\int_1^n (f(x) + xf'(x))\,dx = n^2 - 1$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \frac{2}{f(x)}\,dx = \frac{4}{3}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(1) = \frac{\pi}{2} + 2$.

c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n xf(x)\,dx = \ln 5$.

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+9}$.

a) Arătați că $\int_0^3 \frac{1}{f(x)}\,dx = 36$.

b) Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(3) = \frac{\pi}{12} + 3$.

c) Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 25$.

25. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 3x$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 3x)\,dx = e - 1$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + a^3$.

26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 4x$.

a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - 4x)\,dx = e(e - 1)$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^x$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a xf(x)\,dx = 1 + \frac{4a^3}{3}$.

27. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

a) Calculați $\int_1^2 (x^2 + 2x + 2)f(x)\,dx$.

b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $\ln 5$.

c) Demonstrați că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

28. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}$.

a) Calculați $\int_1^3 (x^2 + x + 2)f(x)\,dx$.

b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

c) Demonstrați că $\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx = 0$.

29. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 3)e^x$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = -\frac{5}{2}$.

b) Determinați numărul real a, știind că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = (x + a)e^x$ este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \leq -\frac{11}{20}$.

30. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-4)e^x$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = -\frac{7}{2}$.

b) Determinați numărul real a, știind că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = (x+a)e^x$ este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \leq -\frac{4}{5}$.

31. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 6$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 4x - 6)\,dx = \frac{1}{3}$.

b) Calculați $\int_1^3 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

c) Arătați că $\int_{2019}^{2020} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{2}$.

32. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 7$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2x - 7)\,dx = \frac{1}{3}$.

b) Calculați $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

c) Arătați că $\int_{2016}^{2018} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{3}$.

33. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{2}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^5 \left(f(x) - \frac{2}{x}\right)dx = 12$.

b) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{2}{x}\right)e^x\,dx = 2e^3$.

c) Determinați numărul real $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu $24+2\ln a$.

34. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{3}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right)dx = 4$.

b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right)e^x\,dx = e^2$.

c) Determinați numărul real $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu $12+3\ln a$.

35. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{5}{2}$.

b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{3}{2} + 4\ln\frac{3}{2}$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

36. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{7}{2}$.

b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{5}{2} + 9\ln\frac{4}{3}$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

37. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2 x f(x)\,dx = \frac{9}{2}$.

b)Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x+3\ln x+2020$ este o primitivă a funcției f.
c)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=e are aria egală cu $\frac{3}{2}$.

38.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+4}{x}$.
a) Arătați că $\int_1^2 xf(x)\,dx=\frac{9}{2}$.
b)Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x+4\ln x+2018$ este o primitivă a funcției f.
c)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=e are aria egală cu 2 .

39.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}$.
a)Arătați că $\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x)\,dx=0$.
b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\ln 2$.
c)Determinați numărul real m>0,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$,axa Ox și dreptele de ecuații x=0,x=m are aria egală cu $\frac{1}{2}\cdot\ln 10$.

40.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+4x}{x^2+1}$.
a)Arătați că $\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x)\,dx=0$.
b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\ln 2$.
c)Determinați numărul real m>0,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$,axa Ox și dreptele de ecuații x=0,x=m are aria egală cu $\frac{3}{2}\cdot\ln 5$.

41.Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+7x+12}$.
a) Arătați că $\int_0^{2020} (x+3)(x+4)f(x)\,dx=2020$.
b)Arătați că $\int_{-1}^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{91}{720}$.
c)Determinați numărul real a,a>0 știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=a , are aria egală cu $\ln\frac{16}{15}$.

42.Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$.
a) Arătați că $\int_0^{2018} (x+2)(x+3)f(x)\,dx=2018$.
b)Arătați că $\int_{-1}^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{35}{288}$.
c)Determinați numărul real a,a>0 știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=a , are aria egală cu $\ln\frac{6}{5}$.

43. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}$.
a)Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)dx=\ln\frac{4}{3}$.
b)Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-3,\infty)$.
c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=n are aria mai mare sau egală cu ln2 , pentru orice număr natural nenul n.

44. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.
a)Arătați că $\int_0^8 \left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 3$.

b)Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-4, \infty)$.
c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=n are aria mai mare sau egală cu $\ln\frac{7}{4}$, pentru orice număr natural nenul n.
45.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+4}$.
a)Arătați că $\int_1^2 (x+4)f(x)\,dx = 2\ln 2 - 1$.
b)Arătați că $\int_1^{e^3} \left(f(x) + (x+4)f'(x)\right) dx = 3$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.
46.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$.
a)Arătați că $\int_1^3 (x+2)f(x)\,dx = 3\ln 3 - 2$.
b)Arătați că $\int_1^e \left(f(x) + (x+2)f'(x)\right) dx = 1$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[3,4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.
47.Se consinderă funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 1$.
a)Arătați că $\int_1^e f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{3}{2}$.
b)Arătați că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx = \frac{7e^4-3}{16}$.
c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.
48.Se consinderă funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2$.
a)Arătați că $\int_1^e f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{5}{2}$.
b)Arătați că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx = \frac{9e^4-7}{16}$.
c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.
49.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$.
a)Arătați că $\int_1^2 (x+2)f(x)\,dx = 2\ln 2 - 1$.
b)Arătați că $\int_1^e \left(f(x) + (x+2)f'(x)\right) dx = 1$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[2,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$.
50. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
a)Arătați că $\int_1^e f^2(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{3}$.
b)Arătați că $\int_1^e x^4 f(x)\,dx = \frac{4e^5+1}{25}$.
c)Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e^2$.
51.Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$.
a)Arătați că $\int_1^4 \left(f(x) - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{15}{2}$.

b)Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{2}{x}\right) e^x \, dx = 2e^3$.
c)Determinați numărul real a>1,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=a are aria egală cu 4+2lna.
52. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 7$.
a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 4x - 7) \, dx = \frac{1}{3}$.
b)Calculați $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.
c)Arătați că $\int_{2015}^{2016} \frac{1}{f(x)} dx \le \frac{1}{3}$.
d) Calculați $\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx$.
53. Se consideră funcția $f:(-3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+3}$.
a)Calculați $\int_0^1 (x + 3)f(x) \, dx$.
b)Calculați $\int_1^e (x + 3)f(x) \ln x \, dx$.
c)Arătați că $F(e - 3) = \frac{e^2 - 12e + 5}{2}$,unde $F:(-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(-2) = -12$.
54. Se consideră funcția $f:(-3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+3}$.
a)Arătați că $\int_0^1 (x + 3)f(x) \, dx = \frac{1}{2}$.
b)Arătați că $\int_{2013}^{2014} \left(f(x) + (x + 3)f'(x)\right) dx = 1$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{f(x)}$.
55.Se consideră funcția $f:(-2, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2}$.
a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{5}{2}$.
b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x) \, dx = -\frac{3}{2} + 4\ln\frac{3}{2}$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.
56. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x}$.
a) Arătați că $\int_1^2 x f(x) \, dx = \frac{9}{2}$.
b)Demonstrați că funcția $F:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = x + 3\ln x + 2016$ este o primitivă a funcției f.
c)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = (f(x) - 1)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=e are aria egală cu $\frac{3}{2}$.
57.Se consideră funcția $f:(-2, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+2}$.
a)Calculați $\int_1^2 (x + 2)f(x) \, dx$.
b)Arătați că $\int_0^1 2x^2 f(x) \, dx + \int_0^1 x^3 f(x) \, dx = \frac{1}{4}$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x)$.
58.Se consideră funcția $f:(3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$.

a)Arătați că $\int_4^5 (x-3)f(x)\,dx = \ln\frac{8}{7}$.

b)Calculați $\int_4^5 (x^3-27)f(x)\,dx$.

c)Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x=4$ și $x=5$,este egală cu $\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$.

59.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+5x}{x^2+4}$.

a)Arătați că $\int_{-2}^2 (x^2+4)f(x)\,dx = 0$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.

c)Determinați numărul real m>0,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$,axa Ox și dreptele de ecuații x=0,x=m are aria egală cu ln3.

60.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$.

a)Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=2$.

c)Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația:
$\int_0^a f(x)\,dx - \frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx = a^4-1$.

61.Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$.

a)Arătați că $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

b)Calculați $\int_0^{\sqrt{3}} xf'(x)\,dx$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

62.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)(x-2)$.

a)Arătați că $\int_3^4 \frac{f(x)}{x(x-2)}\,dx = \frac{11}{2}$.

b)Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f știind că $F(2)=-2$.

c)Arătați că $\int_{e^2}^{e^3} \frac{f(x)\ln x}{x^2-4}\,dx = \frac{5e^6-3e^4}{4}$.

63. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}$.

a)Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

b)Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}$ este o primitivă a funcției f.

c)Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=4$.

64. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x+2}$.

a)Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}$.

b)Calculați $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c)Determinați numărul real a>0,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=1 are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln\frac{a^2+2a}{2}$.

65.Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^{2016} (x+1)(x+3)f(x)\,dx = 2016$.

b)Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f'(x)\,dx = -\frac{1736}{11025}$.

c)Determinați numărul real a,a>0 știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=0 și x=a , are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln 2$.

66. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = (x-n)e^x$.

a)Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

b)Arătați că funcția f_{2015} este o primitivă a funcției f_{2014} .

c)Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \le \frac{5-9n}{6}$, pentru orice număr natural nenul n,folosind eventual inegalitatea $e^x \ge x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

67.Se consideră funcția $f:(-3,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{7}{2}$.

b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{5}{2} + 9\ln\frac{4}{3}$.

c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

68. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x + \frac{3}{x}$.

a)Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right)dx = 4$.

b)Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right)e^x\,dx = e^2$.

c)Determinați numărul real a>1,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=a are aria egală cu 4+3lna.

69. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+9}$.

a)Arătați că $\int_0^3 (x^2+5x+9)f(x)\,dx = 24$.

b)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații x=1 și x=2 are aria egală cu $\ln\frac{23}{15}$.

c)Demonstrați că $\int_{-2}^{3} f'(x)f(x)\,dx = 0$.

70. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(4x-1)e^x$.

a)Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)\,dx = 1$.

b)Aflați numărul real m ,pentru care funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x) = (4x-m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

c)Aflați numărul real nenul a,știind că $\int_0^a f(x)\,dx = 4a$.

71. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$.

a)Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = 6$.

b)Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x) = 2x^2 + \ln x + 2018$ este o primitivă a funcției f.

c)Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x) = f(x)$ este mai mare decât 45π.

72. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = xe^x + 1$.

a)Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(0) = 2$.

b)Calculați $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

c)Determinați numerele reale x,știind că $\int_1^x f(t)\,dt = 0$.

73. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 12$.
a)Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 6x - 12)\,dx = \frac{1}{3}$.
b)Calculați $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.
c)Arătați că $\int_{2016}^{2017} \frac{1}{f(x)}\,dx \le \frac{1}{3}$.
74. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$.
a)Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) dx = 4$.
b)Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) e^x\,dx = e^2$.
c)Determinați numărul real $a>1$,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu $12-\ln a$.
75. Se consideră funcția $f:(-\infty, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-2}$.
a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = -\frac{3}{2}$.
b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{5}{2} - 4\ln 2$.
c)Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$.
76. Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x}$.
a) Arătați că $\int_1^3 x f(x)\,dx = 10$.
b)Demonstrați că funcția $F:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = x + 3\ln x + 2017$ este o primitivă a funcției f.
c)Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = (f(x) - 1)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu $\frac{3}{2}$.
77. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3+7x}{x^2+1}$.
a)Arătați că $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x)\,dx = 0$.
b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + 3\ln 2$.
c)Determinați numărul real $m>0$,știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$,axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$,$x=m$ are aria egală cu $\ln 27$.
78. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
a)Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b)Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1) = 1$.
c)Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația:
$\int_0^a f(x)\,dx + \frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx = a^6 - 1$.
79.Se consideră funcția $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^{2018}}$.
a)Arătați că $\int_2^4 x^{2018} f(x)\,dx = e^2(e - 1)(e + 1)$.
b)Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul$(0, 2018]$.
c)Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f,axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=4$ are aria mai mare sau egală cu $\frac{e^2(e-1)(e+1)}{2^{4036}}$.
80.Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_1^4 (x^2+1)f(x)\,dx = 3$.

b) Demonstrați că $\int_0^{\sqrt{3}} x^2 f(x)\,dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

c) Determinați numerele naturale n, știind că $\int_n^{n+2} 2xf(x)\,dx = \ln\frac{13}{5}$.

81. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=x+\frac{36}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{36}{x}\right)dx = 4$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=4$ are aria egală cu $\ln\frac{52}{37}$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x)-\frac{36}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{3+\sqrt{3}+a}{2}$.

82. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty), f(x)=x+\frac{25}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-\frac{25}{x}\right)dx = 4$.

b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=5$ are aria egală cu $\ln\frac{25}{13}$.

c) Determinați numărul real a, știind că $\int_1^{\sqrt{3}} \left(f(x)-\frac{25}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{3+\sqrt{3}+a}{2}$.

83. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = xe^x + 2x$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)-xe^x)\,dx = 1$.

b) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)dx=\frac{e^4-e+6}{2}$.

c) Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{4-3e}{3}$.

84. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 3x + xe^x$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x)-xe^x)\,dx = \frac{3}{2}$.

b) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot f(x^2)dx=\frac{e^4-e+9}{2}$.

c) Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\int_0^1 F(x)\,dx=1-e$.

85. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+2x+6}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+2x+6)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+6}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

c) Arătați că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx = \frac{e^2+13}{4}$.

86. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+2x+8}$.

a) Arătați că $\int_0^1 (x^2+2x+8)f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+8}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 2$.

c) Arătați că $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx = \frac{e^2+17}{4}$.

87. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = 1-x^7$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{8}$.

b)Arătați că $\int_0^1 x^6 (f(x))^7 \, dx = \frac{1}{56}$.

c)Demonstrați că $\int_0^1 (f(x))^{n+1} \, dx \leq \int_0^1 (f(x))^n \, dx$, pentru orice număr natural nenul n.

88. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^9$.

a)Arătați că $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{9}{10}$.

b)Arătați că $\int_0^1 x^8 (f(x))^9 \, dx = \frac{1}{90}$.

c)Demonstrați că $\int_0^1 (f(x))^{n+1} \, dx \leq \int_0^1 (f(x))^n \, dx$, pentru orice număr natural nenul n.