Irracionális, exponenciális és logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

Nagy Örs
matematikatanár

Báthory István Elméleti Líceum
Kolozsvár

Irracionális egyenletek, egyenlőtlenségek

- **gyökjel alatt (is) szerepel ismeretlen**
- **létezési feltétel:** $\sqrt[2k]{E(x)}$ **esetén** $E(x) \geq 0$

A gyökök tulajdonságai:

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$
6. $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$
7. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$

Gyakoribb egyenlettípusok:

1. Egy gyökkifejezést tartalmazó egyenletek

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

2. Több gyök összegét/különbségét tartalmazó egyenletek

$$\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = h(x), \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)$ alakú egyenletek

1. Oldd meg az $x + \sqrt{3x+1} = 1$ egyenletet!

- létezési feltétel: $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$
- a gyök különválasztása: $\sqrt{3x+1} = 1 - x$
- kompatibilitási feltétel: $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$
- értelmezési tartomány: $D_x = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$
- a gyök eltüntetése: $\sqrt{3x+1} = 1 - x \ |()^2$

$$3x + 1 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$$

$$\text{Tehát } x = 0 \in D_x \text{ vagy } x = 5 \notin D_x, \text{ így } M = \{0\}.$$

Ha nem határozzuk meg az értelmezési tartományt, akkor a megoldásjelölteket visszahelyettesítéssel kötelezően ellenőrizni kell!

2. Oldd meg a $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} \leq 1$ egyenlőtlenséget!

- létezési feltétel: $(2x+3 \geq 0$ és $x+1 \geq 0) \Leftrightarrow x \geq -1$
- a gyökök szétválasztása: $\sqrt{2x+3} \leq 1 + \sqrt{x+1}$
- kompatibilitási feltétel: nincs, mert mindkét oldal pozitív
- értelmezési tartomány: $D_x = [-1, \infty)$
- a gyökök eltüntetése: $0 < \sqrt{2x+3} \leq 1 + \sqrt{x+1} \ |()^2$

$$2x+3 \leq 1 + x + 1 + 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+1 \leq 2\sqrt{x+1}$$

- kompatibilitási feltétel: nincs, mert mindkét oldal nemnegatív
- a gyök eltüntetése: $0 \leq x+1 \leq 2\sqrt{x+1} \ |()^2$

$$(x+1)^2 \leq 4(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$$

Mivel $[-1; 3] \cap D_x = [-1; 3]$, ezért $M = [-1; 3]$.

3. Oldd meg a $\sqrt[3]{8-x^2} \geq 2-x$ egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[3]{8-x^2} \geq 2-x \,\Big|\, ()^3 \Leftrightarrow 8-x^2 \geq (2-x)^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$8-x^2 \geq 8-12x+6x^2-x^3 \Leftrightarrow x^3-7x^2+12x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x-4) \geq 0$$

Előjeltáblázattal tanulmányozva a szorzat előjelét $\Rightarrow M = [0,3] \cup [4,+\infty)$.

3. Oldd meg a $\sqrt[3]{8-x^2} \geq 2-x$ egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[3]{8-x^2} \geq 2-x \,\Big|\, ()^3 \Leftrightarrow 8-x^2 \geq (2-x)^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$8-x^2 \geq 8-12x+6x^2-x^3 \Leftrightarrow x^3-7x^2+12x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x-4) \geq 0$$

Előjeltáblázattal tanulmányozva a szorzat előjelét $\Rightarrow M = [0,3] \cup [4,+\infty)$.

4. Oldd meg a $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ egyenletet!

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11} \,\Big|\, ()^3 \qquad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$x+5+x+6+3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}) = 2x+11 \iff$$

$$\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+5)(x+6)}\sqrt[3]{2x+11} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+5)(x+6)(2x+11) = 0 \Longrightarrow M = \left\{-5, -6, -\frac{11}{2}\right\}.$$

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

- **hatványkitevőben (is) szerepel ismeretlen**

A hatványok tulajdonságai:

1. $a^0 = 1, 1^x = 1$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
7. Ha $a > 1$, akkor $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
8. Ha $a \in (0, 1)$, akkor $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

- **hatványkitevőben (is) szerepel ismeretlen**

A hatványok tulajdonságai:

1. $a^0 = 1, 1^x = 1$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
7. Ha $a > 1$, akkor $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
8. Ha $a \in (0,1)$, akkor $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

Gyakoribb egyenlettípusok:

1. Alapegyenletek $\quad a^{f(x)} = a^{g(x)}$, ill. $a^{f(x)} = b,\ a > 0, a \neq 1$
2. Másodfokúra visszavezethető egyenletek

$$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \gamma = 0,\ a > 0, a \neq 1$$

3. Azonos alapú tagokat tartalmazó egyéb egyenletek

Alapegyenletek, egyenlőtlenségek $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le b$, $a > 0, a \neq 1$

1. **Oldd meg a $3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225$ egyenletet!**

$$3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225 \Leftrightarrow 15^{\frac{x}{2}} = 15^2 \overset{\text{inj.}}{\Longleftrightarrow} \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow M = \{4\}.$$

Alapegyenletek, egyenlőtlenségek
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \leq b$, $a > 0, a \neq 1$

1. Oldd meg a $3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225$ egyenletet!

$$3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225 \Leftrightarrow 15^{\frac{x}{2}} = 15^2 \overset{\text{inj.}}{\Longleftrightarrow} \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow M = \{4\}.$$

2. Oldd meg az $\left(5^{x^2} - 1\right) \cdot (3^{2x-1} + 9) \leq 0$ egyenlőtlenséget!

$$\left(5^{x^2} - 1\right) \cdot (3^{2x-1} + 9) \leq 0 \;\Big|\; : (3^{2x-1} + 9) > 0 \Leftrightarrow 5^{x^2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$5^{x^2} \leq 1 \underset{\text{sz.}\nearrow}{\overset{5>1}{\Longleftrightarrow}} x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow M = \{0\}.$$

Megj.: Ha $0 < a < 1$, akkor $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \overset{\text{sz.}\searrow}{\Longleftrightarrow} f(x) \geq g(x)$.

Ha $a > 1$, akkor $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \overset{\text{sz.}\nearrow}{\Longleftrightarrow} f(x) \leq g(x)$.

3. Oldd meg a $9^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{1+\sqrt{x}} - 27 = 0$ egyenletet!

- létezési feltétel: $x \geq 0 \Rightarrow D_x = [0; \infty)$

$$9^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{1+\sqrt{x}} - 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 27 = 0 \underset{t>0}{\overset{t=3^{\sqrt{x}}}{\Longleftrightarrow}} t^2 - 6t - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[t = -3 < 0 \;\; \text{v.} \;\; t = 9 > 0] \Longrightarrow 3^{\sqrt{x}} = 9 \overset{\text{inj.}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \in D_x \Longrightarrow M = \{4\}.$$

Másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek

$$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \gamma = 0,\ \ a > 0, a \neq 1$$

3. Oldd meg a $9^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{1+\sqrt{x}} - 27 = 0$ egyenletet!

- létezési feltétel: $x \geq 0 \Rightarrow D_x = [0; \infty)$

$$9^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{1+\sqrt{x}} - 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 27 = 0 \xLeftrightarrow[t>0]{t=3^{\sqrt{x}}} t^2 - 6t - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[t = -3 < 0 \ \text{ v. } \ t = 9 > 0] \Longrightarrow 3^{\sqrt{x}} = 9 \xLeftrightarrow{\text{inj.}} \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \in D_x \Longrightarrow M = \{4\}.$$

4. Oldd meg a $9^x + 6^x \leq 2 \cdot 4^x$ egyenlőtlenséget!

$$9^x + 6^x \leq 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow 3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} \leq 0 \mid : 2^{2x} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2 \leq 0$$

$$\xLeftrightarrow[t>0]{t=\left(\frac{3}{2}\right)^x} t^2 + t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-2; 1] \Rightarrow -2 \underset{(\mathrm{I})}{\leq} \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 1 \xLeftrightarrow[\text{sz.}\nearrow]{\frac{3}{2}>1} x \leq 0 \Rightarrow M = (-\infty; 0].$$

Azonos alapú tagokat tartalmazó egyéb egyenletek
$c_1 a^{f_1(x)} + c_2 a^{f_2(x)} + \cdots + c_k a^{f_k(x)} = c, \ a > 0, a \neq 1$

5. Oldd meg a $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$ egyenletet!

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30 \Leftrightarrow 2^x \cdot \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) = 30 \Leftrightarrow$$

$$2^x \cdot 15 = 30 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow M = \{1\}.$$

Azonos alapú tagokat tartalmazó egyéb egyenletek

$c_1 a^{f_1(x)} + c_2 a^{f_2(x)} + \cdots + c_k a^{f_k(x)} = c,\ \ a > 0, a \neq 1$

5. Oldd meg a $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$ egyenletet!

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30 \Leftrightarrow 2^x \cdot \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) = 30 \Leftrightarrow$$

$$2^x \cdot 15 = 30 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow M = \{1\}.$$

6. Oldd meg a $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \geq \frac{19}{6}$ egyenlőtlenséget!

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \geq \frac{19}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) \geq \frac{19}{6} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{19}{9} \geq \frac{19}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2} \overset{\frac{2}{3}<1}{\underset{\text{sz.}\searrow}{\Longleftrightarrow}} x \leq -1 \Rightarrow M = (-\infty, -1].$$

Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

- **logaritmus argumentumában v. alapjában (is) szerepel ismeretlen**
- **létezési feltétel:** $\log_a E(x)$ **esetén** $E(x) > 0, a > 0, a \neq 1$

A logaritmusok tulajdonságai:

1. $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
2. $a^{\log_a x} = x, x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$
3. $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$
4. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$
5. $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

- **logaritmus argumentumában v. alapjában (is) szerepel ismeretlen**
- **létezési feltétel:** $\log_a E(x)$ **esetén** $E(x) > 0, a > 0, a \neq 1$

A logaritmusok tulajdonságai:

1. $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
2. $a^{\log_a x} = x, x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$
3. $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$
4. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$
5. $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Gyakoribb egyenlettípusok:

1. Alapegyenletek $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, ill. $\log_a f(x) = b,\ a > 0, a \neq 1$
2. Másodfokúra visszavezethető egyenletek
$$\alpha \log_a^2 f(x) + \beta \log_a f(x) + \gamma = 0,\ a > 0, a \neq 1$$
3. Különböző alapú logaritmusokat tartalmazó egyenletek

Alapegyenletek, egyenlőtlenségek $\log_a f(x) = \log_a g(x),\ \log_a f(x) \geq b,\ a > 0, a \neq 1$

1. **Oldd meg a $\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 8$ egyenletet!**
   - létezési felt.: $[x - 2 > 0 \text{ és } x > 0] \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow D_x = (2, \infty)$.

$$\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 8 \Leftrightarrow \log_3[(x-2)x] = \log_3 8 \overset{\text{inj.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$x(x-2) = 8 \Longrightarrow x_1 = -2 \notin D_x, x_2 = 4 \in D_x \Rightarrow M = \{4\}.$$

Alapegyenletek, egyenlőtlenségek
$\log_a f(x) = \log_a g(x), \ \log_a f(x) \geq b, \ a > 0, a \neq 1$

1. **Oldd meg a $\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 8$ egyenletet!**
   - létezési felt.: $[x-2>0$ és $x>0] \Leftrightarrow x>2 \Rightarrow D_x = (2,\infty)$.

$$\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 8 \Leftrightarrow \log_3[(x-2)x] = \log_3 8 \overset{\text{inj.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$x(x-2) = 8 \Longrightarrow x_1 = -2 \notin D_x, x_2 = 4 \in D_x \Rightarrow M = \{4\}.$$

2. **Oldd meg a $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq 0$ egyenlőtlenséget!**
   - létezési felt.: $5x-1>0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5} \Rightarrow D_x = \left(\frac{1}{5},\infty\right)$.

$$\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \underset{\text{sz.}\searrow}{\overset{\frac{1}{3}<1}{\Longleftrightarrow}} 5x-1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$x \leq \frac{2}{5} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right] \Longrightarrow M = \left(-\infty, \frac{2}{5}\right] \cap D_x = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right].$$

3. Oldd meg a $4 + \log_3^2 x^2 = 8 \log_3 x$ egyenletet!

- létezési felt.: $[x^2 > 0$ és $x > 0] \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

$$4 + \left(\log_3 x^2\right)^2 = 8 \log_3 x \Leftrightarrow 4 + (2 \log_3 x)^2 = 8 \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$4 \log_3^2 x - 8 \log_3 x + 4 = 0 \;\Big|\; : 4 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2 \log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3 \in D_x \Rightarrow M = \{3\}.$$

Másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek

$\alpha \log_a^2 f(x) + \beta \log_a f(x) + \gamma = 0, \;\; a > 0, a \neq 1$

3. Oldd meg a $4 + \log_3^2 x^2 = 8 \log_3 x$ egyenletet!

- létezési felt.: $[x^2 > 0 \text{ és } x > 0] \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

$$4 + \left(\log_3 x^2\right)^2 = 8 \log_3 x \Leftrightarrow 4 + (2 \log_3 x)^2 = 8 \log_3 x \Leftrightarrow$$

$$4 \log_3^2 x - 8 \log_3 x + 4 = 0 \;\Big|\; : 4 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2 \log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3 \in D_x \Rightarrow M = \{3\}.$$

4. Oldd meg a $\log_3^2 x - \log_3 x \leq 0$ egyenlőtlenséget!

- létezési felt.: $x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

$$\log_3^2 x - \log_3 x \leq 0 \xLeftrightarrow{t = \log_3 x} t^2 - t \leq 0 \Leftrightarrow t(t-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$t \in [0, 1] \Leftrightarrow \log_3 x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 3 \xLeftrightarrow[\text{sz.}\nearrow]{3>1} 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow M = [1, 3].$$

5. Oldd meg a $\log_2 x + \log_x 2 = 2$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0$ és $x \neq 1 \Rightarrow D_x = (0, \infty) \setminus \{1\}$.

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2 \xLeftrightarrow{t=\log_2 x} t + \frac{1}{t} = 2 \;\Big|\; \cdot t \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \in D_x \Rightarrow M = \{2\}.$$

5. Oldd meg a $\log_2 x + \log_x 2 = 2$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0$ és $x \neq 1 \Rightarrow D_x = (0, \infty) \setminus \{1\}$.

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2 \xLeftrightarrow{t=\log_2 x} t + \frac{1}{t} = 2 \,\Big|\, \cdot t \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \in D_x \Rightarrow M = \{2\}.$$

6. Oldd meg a $2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 2\log_2 x, \quad \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$$

5. Oldd meg a $\log_2 x + \log_x 2 = 2$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0$ és $x \neq 1 \Rightarrow D_x = (0, \infty) \setminus \{1\}$.

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2 \xLeftrightarrow{t=\log_2 x} t + \frac{1}{t} = 2 \,\Big|\, \cdot t \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2-2t+1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \in D_x \Rightarrow M = \{2\}.$$

6. Oldd meg a $2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 2\log_2 x, \quad \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$$

$$2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9 \Leftrightarrow \log_2 x + 2\log_2 x - \log_2 x = 9 \Leftrightarrow$$

$$3\log_2 x = 9 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Longrightarrow x = 8 \in D_x \Rightarrow M = \{8\}.$$

Egy megoldással rendelkező vegyes egyenletek

7. Oldd meg az $x + 2^x + \log_2 x = 7$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

Tekintsük az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2^x + \log_2 x$ függvényt.
f szigorúan növekvő, mert szig. növekvő függvények összege $\Rightarrow$
f injektív $\Rightarrow$ az $f(x) = 7$ egyenletnek legtöbb egy megoldása lehet.
Mivel $f(2) = 7$, ezért $x = 2 \in D_x$ megoldás. Tehát $M = \{2\}$.

Egy megoldással rendelkező vegyes egyenletek

7. Oldd meg az $x + 2^x + \log_2 x = 7$ egyenletet!

- létezési felt.: $x > 0 \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

  Tekintsük az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2^x + \log_2 x$ függvényt.
  f szigorúan növekvő, mert szig. növekvő függvények összege $\Rightarrow$
  f injektív $\Rightarrow$ az $f(x) = 7$ egyenletnek legtöbb egy megoldása lehet.
  Mivel $f(2) = 7$, ezért $x = 2 \in D_x$ megoldás. Tehát $M = \{2\}$.

8. Oldd meg a $\log_{x+\frac{1}{x}} 4 = x + \frac{1}{x}$ egyenletet!

- létezési felt.: $\left[x + \frac{1}{x} > 0 \text{ és } x + \frac{1}{x} \neq 1\right] \Rightarrow D_x = (0, \infty)$.

$$\log_{x+\frac{1}{x}} 4 = x + \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} = 4.$$

De $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$ esetén, ezért $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} \geq 4$.
Egyenlőség $x + \frac{1}{x} = 2$ esetén van, ahonnan $x = 1 \in D_x$. Tehát $M = \{1\}$.

További feladatok

1. Oldd meg az alábbi irracionális egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

   a) $\sqrt{2-x}-x=0$
   b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$
   c) $\sqrt[3]{x-2}+x=2$
   d) $\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{x-2}=0$
   e) $\sqrt{2-x}<x$
   f) $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1$

2. Oldd meg az alábbi exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

   a) $4^{x+2}=2^{x^2+5}$
   b) $3^{x+1}+3^{1-x}=10$
   c) $2^{3x-2}<4^{x^2-3x-1}$
   d) $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$
   e) $4^x+2\cdot 6^x\leq 3^{2x+1}$
   f) $x+3^x=4$

3. Oldd meg az alábbi logaritmusos egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

   a) $\log_5(9-x^2)=1$
   b) $\log_3(x^2-6)\geq\log_3(2x-3)$
   c) $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$
   d) $\log_{\frac{1}{5}}(3x+1)\leq\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$
   e) $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$
   f) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x\geq\frac{11}{6}$