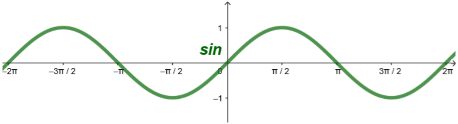
Trigonometrikus függvények és geometriai alkalmazásaik

Nagy Örs
matematikatanár

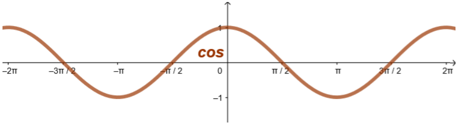
Báthory István Elméleti Líceum
Kolozsvár

A trigonometrikus függvények tulajdonságai

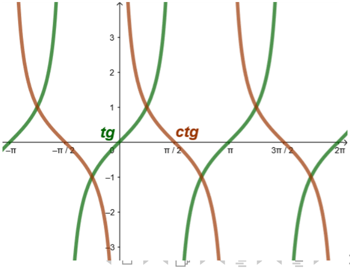
- $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin x$
  - periodikus: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - páratlan: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - korlátos, $\operatorname{Im} f = [-1,1]$, szürj., de NEM inj.



- $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \cos x$
  - periodikus: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - páros: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
  - korlátos, $\operatorname{Im} f = [-1,1]$, szürj., de NEM inj.



- $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$
  - per.: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$
  - ptl.: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$
  - nem korlátos, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, szürj., de NEM inj.
- $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$
  - period.: $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
  - páratlan: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$



1. Vizsgáld az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$ függvény paritását!

$$f(-x) = \sin(-4x) \cdot \cos(-3x) = -\sin 4x \cdot \cos 3x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ ptl.}$$

1. Vizsgáld az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 4x\cdot\cos 3x$ függvény paritását!

$$f(-x)=\sin(-4x)\cdot\cos(-3x)=-\sin 4x\cdot\cos 3x=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f \text{ ptl.}$$

2. Ig., h. $T=\pi$ periódusa az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 4x\cdot\cos 2x$ függvénynek!

$$f(x+\pi)=\sin(4x+4\pi)\cdot\cos(2x+2\pi)=\sin 4x\cdot\cos 2x=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

1. Vizsgáld az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$ függvény paritását!

$$f(-x) = \sin(-4x) \cdot \cos(-3x) = -\sin 4x \cdot \cos 3x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ ptl.}$$

2. Ig., h. $T = \pi$ periódusa az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 2x$ függvénynek!

$$f(x + \pi) = \sin(4x + 4\pi) \cdot \cos(2x + 2\pi) = \sin 4x \cdot \cos 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4\cos 2x$ függvény képét!

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \mid \cdot (-4) \Longleftrightarrow 4 \geq -4\cos 2x \geq -4 \mid +3 \Longleftrightarrow$$

$$7 \geq 3 - 4\cos 2x \geq -1 \Longrightarrow \operatorname{Im} f = [-1, 7].$$

1. Vizsgáld az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x$ függvény paritását!

$$f(-x) = \sin(-4x) \cdot \cos(-3x) = -\sin 4x \cdot \cos 3x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ ptl.}$$

2. Ig., h. $T = \pi$ periódusa az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 4x \cdot \cos 2x$ függvénynek!

$$f(x+\pi) = \sin(4x + 4\pi) \cdot \cos(2x + 2\pi) = \sin 4x \cdot \cos 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4\cos 2x$ függvény képét!

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \mid \cdot (-4) \Longleftrightarrow 4 \geq -4\cos 2x \geq -4 \mid +3 \Longleftrightarrow$$

$$7 \geq 3 - 4\cos 2x \geq -1 \Longrightarrow \operatorname{Im} f = [-1, 7].$$

4. Igazold, hogy $\cos 1 > \cos 2$.

$$x \mapsto \cos x \text{ szig.} \searrow \ (0,\pi)\text{-n}, \quad 0 < 1 < 2 < \pi \implies \cos 1 > \cos 2.$$

5. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a - b = \pi$, ig., hogy $\cos a \cdot \cos b \leq 0$.

$$\cos a \cdot \cos b = \cos a \cdot \cos(a - \pi) = -\cos a \cdot \cos a = -\cos^2 a \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. **Ha** $a, b \in \mathbb{R}$ **úgy, hogy** $a - b = \pi$, **ig., hogy** $\cos a \cdot \cos b \leq 0$.

$$\cos a \cdot \cos b = \cos a \cdot \cos(a - \pi) = -\cos a \cdot \cos a = -\cos^2 a \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. **Számítsd ki:** $\sin^2(x + \pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right), x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x + \pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = (-\sin x)^2 + \cos^2(-x) = 1.$$

$$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x), \forall x \in \mathbb{R}$$

5. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a - b = \pi$, ig., hogy $\cos a \cdot \cos b \leq 0$.

$$\cos a \cdot \cos b = \cos a \cdot \cos(a - \pi) = -\cos a \cdot \cos a = -\cos^2 a \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. Számítsd ki: $\sin^2(x + \pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right), x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x + \pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = (-\sin x)^2 + \cos^2(-x) = 1.$$

$$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x), \forall x \in \mathbb{R}$$

7. Ha $\sin x + \cos x = 1$, számítsd ki $\operatorname{tg} 2x$ értékét!

$$\sin x + \cos x = 1 |()^2 \Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = 0.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}; \quad 2\sin x \cos x = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

8. Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$, ig., h. $9(\sin 2x + \cos 4x) = 7$.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 3 \Longrightarrow$$

$$\sin 2x = \frac{2}{3} \Longrightarrow \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \Longrightarrow$$

$$\sin 2x + \cos 4x = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \Longrightarrow 9(\sin 2x + \cos 4x) = 7.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$$

8. Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$, ig., h. $9(\sin 2x + \cos 4x) = 7$.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 3 \Longrightarrow$$

$$\sin 2x = \frac{2}{3} \Longrightarrow \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \Longrightarrow$$

$$\sin 2x + \cos 4x = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \Longrightarrow 9(\sin 2x + \cos 4x) = 7.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$$

9. Ha $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $a + b = \frac{\pi}{4}$, ig., hogy $2\sin^2 a = 1 - \sin 2b$.

$$1 - \sin 2b = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = 1 - \cos 2a = 2\sin^2 a.$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

10. Ha $a, b \in \mathbb{R} : \sin a + \sin b = 1,\ \cos a + \cos b = \frac{1}{2}$, **szám. ki** $\cos(a-b)$**-t!**

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \sin a + \sin b = 1 \ \ |()^2 \\ \cos a + \cos b = \frac{1}{2} \ \ |()^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \sin^2 a + 2\sin a \sin b + \sin^2 b = 1 \\ \cos^2 a + 2\cos a \cos b + \cos^2 b = \frac{1}{4} \end{cases} \Bigg| +$$

$$1 + 2\sin a \sin b + 2\cos a \cos b + 1 = \frac{5}{4} \implies \cos(a-b) = -\frac{3}{8}.$$

10. Ha $a, b \in \mathbb{R} : \sin a + \sin b = 1,\ \cos a + \cos b = \frac{1}{2}$, **szám. ki** $\cos(a-b)$**-t!**

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \sin a + \sin b = 1 \ |()^2 \\ \cos a + \cos b = \frac{1}{2} \ |()^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad \left.\begin{cases} \sin^2 a + 2\sin a \sin b + \sin^2 b = 1 \\ \cos^2 a + 2\cos a \cos b + \cos^2 b = \frac{1}{4} \end{cases}\right| +$$

$$1 + 2\sin a \sin b + 2\cos a \cos b + 1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow \cos(a-b) = -\frac{3}{8}.$$

11. Ha $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: $\sin a = \frac{3}{5}$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$: $\cos b = \frac{12}{13}$, **hat. meg** $\sin(a+b)$**-t!**

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Longrightarrow \cos a < 0; \quad \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

$$b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Longrightarrow \sin b < 0; \quad \sin b = -\sqrt{1 - \cos^2 b} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}.$$

12. Ha $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **ú., h.** $a + b = \frac{\pi}{4}$**, ig., h.** $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1.$

$$a + b = \frac{\pi}{4} \,\Big|\, \operatorname{tg}() \Longrightarrow \operatorname{tg}(a+b) = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \Leftrightarrow \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1.$$

12. Ha $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **ú., h.** $a + b = \frac{\pi}{4}$**, ig., h.** $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1.$

$$a + b = \frac{\pi}{4} \,\Big|\, \operatorname{tg}() \Longrightarrow \operatorname{tg}(a+b) = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \Leftrightarrow \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1.$$

13. Igazold, hogy $\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$**.**

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(\pi - 4x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 4x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x - 1\right) \Longrightarrow$$

$$\sin^2 2x - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

A trigonometria geometriai alkalmazásai

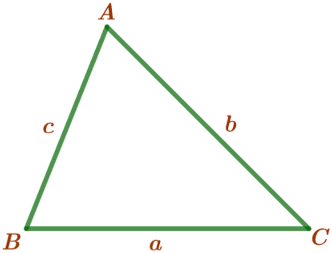
Az $ABC_\triangle$-ben $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, R a $\triangle$ köré írt kör sugara, r a $\triangle$ beírt körének sugara, T a $\triangle$ területe, K a $\triangle$ kerülete, $p = \frac{K}{2}$ a $\triangle$ félkerülete.

Szinusztétel

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Koszinusztétel

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$



$$R = \frac{abc}{4T}, \quad r = \frac{T}{p} = \frac{2T}{K}$$

$$T = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. Az $ABC_\triangle$-ben $AB = 6$, $AC = 4$ és $A = \frac{2\pi}{3}$. Hat. meg T és K értékét!

1. Az $ABC_\triangle$-ben $AB = 6$, $AC = 4$ és $A = \frac{2\pi}{3}$. Hat. meg T és K értékét!

$$T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Koszinusztétel: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$

$$BC = \sqrt{36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \Longrightarrow K = 10 + 2\sqrt{19}.$$

1. Az $ABC_\triangle$-ben $AB=6$, $AC=4$ és $A=\frac{2\pi}{3}$. Hat. meg T és K értékét!

$$T=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{6\cdot 4\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{6\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=6\sqrt{3}.$$

Koszinusztétel: $\quad BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$

$$BC=\sqrt{36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}\Longrightarrow K=10+2\sqrt{19}.$$

2. Az $ABC_\triangle$-ben $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ és $C=\frac{\pi}{6}$. Szám. ki a $\triangle$ kerületét!

$$A=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{12}\Longrightarrow\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Szinusztétel: $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}\Longleftrightarrow\dfrac{BC}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}\Longrightarrow$

$$AC=6\sqrt{2},BC=3(\sqrt{6}+\sqrt{2})\Longrightarrow K=3(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

3. Az $ABC_\triangle$-ben $BC = 8$ és $\cos A = -\frac{3}{5}$. Számítsd ki a háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

$$\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{8}{2 \cdot \frac{4}{5}} = 5.$$

3. Az $ABC_{\triangle}$-ben $BC = 8$ és $\cos A = -\frac{3}{5}$. Számítsd ki a háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

$$\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{8}{2 \cdot \frac{4}{5}} = 5.$$

4. Számítsd ki az 5, 7, ill. 8 oldalhosszúságú háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

$$R = \frac{abc}{4T} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4\sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

3. Az $ABC_\triangle$-ben $BC = 8$ és $\cos A = -\frac{3}{5}$. Számítsd ki a háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

$$\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{8}{2 \cdot \frac{4}{5}} = 5.$$

4. Számítsd ki az 5, 7, ill. 8 oldalhosszúságú háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

$$R = \frac{abc}{4T} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4\sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

5. Számítsd ki a 4, 5, ill. 7 oldalhosszúságú háromszögbe írt kör sugarának hosszát!

$$r = \frac{T}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}}{8} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

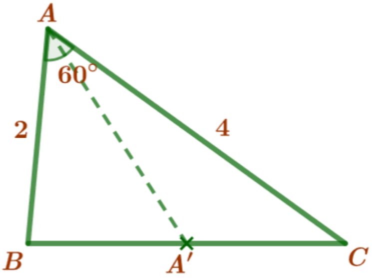
6. Az $ABC_{\triangle}$-ben $AB = 2$, $AC = 4$ és $A = \frac{\pi}{3}$. Számítsd ki az A-ból húzott oldalfelező hosszát!

Kosztét.: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$BC^2 = 4 + 16 - 16\cos 60^\circ = 12$$

Oldfel. hossza: $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$$AA' = \sqrt{\frac{2(4+16)-12}{4}} = \sqrt{7}.$$



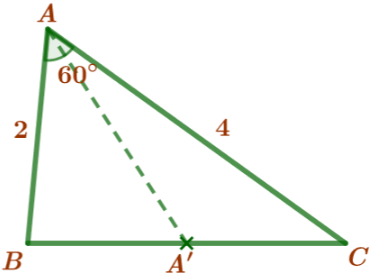
6. Az $ABC_\triangle$-ben $AB = 2$, $AC = 4$ és $A = \frac{\pi}{3}$. Számítsd ki az A-ból húzott oldalfelező hosszát!

Kosztét.: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$BC^2 = 4 + 16 - 16\cos 60^\circ = 12$$

Oldfel. hossza: $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$$AA' = \sqrt{\frac{2(4+16)-12}{4}} = \sqrt{7}.$$



VAGY ITT észrevehető, hogy $AC^2 = AB^2 + BC^2$, hiszen $16 = 4 + 12$, így a Pithagorász-tétel fordított tétele alapján $B = \frac{\pi}{2}$. Így az ABA' dr. $\measuredangle$-ű $\triangle$-ben: $AA' = \sqrt{AB^2 + A'B^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.

További feladatok

1. Számítsd ki: a) $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$ b) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.
2. Határozd meg a $\{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$ halmaz legnagyobb elemét!
3. Igazold, hogy $\sin 40^\circ \cdot \sin 140^\circ = \cos^2 130^\circ$.
4. Ha $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, számítsd ki $\sin 2a$, illetve $\operatorname{tg} a$ értékét!
5. Ha $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$, igazold, hogy $\sin 2x = 1$.
6. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\sin a + \cos b = 1$ és $\cos a + \sin b = \frac{1}{2}$, számítsd ki $\sin(a+b)$ értékét!
7. Az $ABC_\triangle$-ben $A = \frac{\pi}{4}$ és $B = \frac{\pi}{3}$. Hat. meg $\cos C$ értékét!
8. Szám. ki a 3, 4, 5 oldalú $\triangle$ beírt, ill. köré írt körének sugarát!
9. Az $ABC_\triangle$-ben $B = \frac{\pi}{6}$ és $C = \frac{\pi}{4}$. Igazold, hogy $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.
10. Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}^*$ számokat, amelyekre az n, $n+1$ és $n+2$ oldalhosszúságú háromszög tompaszögű!