

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p. 1. Igazold, hogy $a = (4 + 3i)^2 + (4 - 3i)^2$ egy természetes szám, ahol $i^2 = -1$.
- 5p. 2. Határozd meg azt a legnagyobb m egész számot, amelyre az $x^2 - 11x + m = 0$ egyenletnek a gyökei valós számok.
- 5p. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_7(7x) + \log_x 7 = 3$ egyenletet.
- 5p. Határozd meg egy halmaz elemeinek számát tudva, hogy annak pontosan 45 kételemű részhalmaza van.
- 5p. Az xOy koordináta rendszerben adottak az $A(2, -2)$, $B(-4, 4)$ és $C(-4, 0)$ pontok. Határozd meg az ABC háromszög területét.
- 5p. Határozd meg az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ értéket, amelyre $\cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$.

(30 pont)

II. FELADATSOR

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 - a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p. a) Igazold, hogy $\det(A(a)) = 1$.
- 5p. b) Igazold, hogy $A(a)A(b) = A(a+b)$, bármely a és b valós szám esetén!
- 5p. c) Határozd meg az $X \in M_3(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre $A(3) \cdot X = A(5)$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$ asszociatív műveletet.
- 5p. a) Igazold, hogy $x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p. b) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x * x = 14$.
- 5p. c) Határozd meg az n természetes számot tudva, hogy $\left(2^n + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+1} + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+2} + \frac{3}{2}\right) = 2^{20} + \frac{3}{2}$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2}$ függvény.
- 5p. a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{-2(3x^2 - 3x + 1)}{x^3(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p. b) Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmege az $A(0, 3)$ ponton és párhuzamos az a f függvény grafikus képéhez az $x = 2$ abszcisszájú pontban húzott érintőjével.
- 5p. c) Számítsd ki $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{n^2}$.

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvény.

5p. a) Igazold, hogy $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)} dx = 1$.

5p. b) Számítsd ki $\int_0^1 f(x) dx$.

5p. c) Igazold, hogy egyetlen x valós szám létezik, amelyre $\int_0^x e^{f^2(t)} dt = x$