Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

2.Teszt

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I.FELADATSOR (30 de puncte)

5p **1.** Adott a $z=3-i$ komplex szám. Igazold, hogy $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6$ függvény. Határozd meg az a valós számot tudva, hogy $f(a)=f(a-2)$.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_4\left(x^2+4x+5\right)=\log_4(2x+4)$ egyenletet.

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztva egy számot, annak a számjegyeinek a szorzata 16 legyen.

5p **5** Az xOy derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(0,5)$, $B(3,3)$ és $C(7,3)$ pontok. Határozd meg a D pont koordinátáit úgy, hogy $ABCD$ paralelogramma legyen.

5p **6.** Legyen $E(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x+2\sin\frac{5x}{3}$, ahol $x\in(0,\pi)$. Igazold, hogy $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

II.FELADATSOR (30 de puncte)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & -2a^2 & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Igazold, hogy $A(a)A(b)=A(a+b)$, bármilyen a és b valós szám esetén!

5p **c)** Igazold, hogy ha $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, akkor az n természetes szám a 2021 többszöröse!

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=xy-\sqrt{3}(x+y)+3+\sqrt{3}$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $\sqrt{3}*0=\sqrt{3}$.

5p **b)** Igazold, hogy $x*y=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, bármilyen x és y valós szám esetén! .

5p **c)** Számítsd ki $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

III.FELADATSOR (30 de puncte)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{e^x}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez húzott vízszintes aszimptóta egyenletét $+\infty$ felé!

5p **c)** Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\frac{1}{e-1}$, ahol $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{(x+2)^2}$.

2. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx=2-\ln 2$.

5p **c)** Minden nullától különböző n természetes szám esetén, tekintjük az $I_n=\int_0^1 e^x(x+1)^n\left(f(x)\right)^n dx$ számot. Igazold, hogy $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, bármilyen n, $n\geq 2$ természetes szám esetén!