

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Határozd meg a $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani sorozat első három tagjának összegét, ha tudjuk, hogy $a_2 = 2$.
- 5p 2. Határozd meg azt az a valós számot, amelyre az $A(a, a^2)$ pont rajta van az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$ függvény grafikonján.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazában az $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = x - 1$ egyenletet.
- 5p 4. Számítsd ki a valószínűségét annak, hogy kiválasztva egy tetszőleges számot a kétjegyű természetes számok halmazából, az osztható legyen 10-zel.
- 5p 5. Határozd meg azt az m valós számot, amelyre az $\vec{u} = m\vec{i} + 5\vec{j}$ és $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ vektorok kollineárisak.
- 5p 6. Igazold, hogy $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$, bármely x valós szám esetén.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $M(x) = I_2 + xA$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det A = 0$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $M(x)M(y) = M(x + y + xy)$, bármely x és y valós szám esetén.
- 5p c) Határozd meg azokat az (m, n) természetes számpárokat, amelyekre $M(m)M(n) = M(6)$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = xy - x - y + 2$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $x \circ y = (x - 1)(y - 1) + 1$, bármely x és y valós szám esetén.
- 5p b) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x \circ x \leq 5$.
- 5p c) Számítsd ki $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n$, bármely n nullától különböző természetes szám esetén.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Tekintsük az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$ függvényt.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x - e}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az f függvénynek egyetlen pontjában sincs olyan érintője, amely párhuzamos az $y = x$ egyenletű egyenessel.
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy az $e^x - x^e = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a $(0, +\infty)$ intervallumban.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x + 2)e^x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = 18$.
- 5p b) Számítsd ki $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Határozd meg az n nullától különböző természetes számot, ha tudjuk, hogy $\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \frac{3\ln 2}{2}$.