

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Adott a $z = 1 + i$ komplex szám. Igazold, hogy $2z - z^2 = 2$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2m$ függvény, ahol m valós szám. Határozd meg az m valós szám azon értékeinek halmazát, amelyekre $f(x) > 0$, bármely x valós szám esetén!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$ egyenletet!
- 5p 4. Ha egy halmaz részhalmazainak száma 32, határozd meg ezen halmaz elemeinek számát!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(0,1)$, $B(2,5)$ és $C(6,1)$ pontok. Határozd meg a D pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$!
- 5p 6. Határozd meg az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ azon értékét, amelyre $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x - \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak az $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(2)) = 8$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $A(a)A(b) = 2A(ab - a - b + 2)$, bármely a és b valós számok esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat a p és q egész számpárokat, amelyekre $A(p)A(q) = 4I_3$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = -\frac{3}{5}xy + x + y$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $x * y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p b) Igazold, hogy $\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
- 5p c) Számítsd ki $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * K * \frac{2020}{3}$ értékét!

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \ln(x^2 + 1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$!
- 5p b) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy az f függvény bijektív!
2. Adott az $f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{74}{3}$.

5p b) Számítsd ki $\int_{-3}^3 |x f(x)| dx$.

5p c) Minden nullától különböző n természetes számra, tekintsük az $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$ számot. Bizonyítsd be, hogy az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat monoton!