

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Efektív munkaidő 3 óra.**

I. Feladatsor

(30 pont)

- 5p** 1. Határozzátok meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány harmadik tagját, tudva hogy $b_1 = 1$ és $b_2 = 2$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ függvény. Határozzátok meg az x természetes számokat, melyekre $f(x) < 7$.
- 5p** 3. Oldjátok meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 + 8} = x + 2$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozzátok meg a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz kételemű részhalmazainak a számát!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(1, 1), B(4, 4), C(1, a)$ és $D(2, 1)$ pontok, ahol a valós szám. Határozzátok meg az a valós számot, melyre az AB és CD egyenesek párhuzamosak!
- 5p** 6. Határozzátok meg annak az ABC derékszögű háromszögnek a BC átfogóját, melyben $AB = 10$ és $\cos B = \frac{1}{2}$.

II. Feladatsor

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $\det(A(1)) = 4$.
- 5p** b) Bizonyítsátok be, hogy $A(x)A(y) = A(x+y+3xy)$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p** c) Határozzátok meg az a valós számokat, melyekre $A(a)A(a) = A(5)$.
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x * y = 5(x+y-4) - xy$ asszociatív művelet!
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $x * y = -(x-5)(y-5) + 5$ bármely x és y valós számok esetén!
- 5p** b) Határozzátok meg az x valós értékeit, melyekre $x * x \geq x$.
- 5p** c) Számítsátok ki $1 * (-2) * 3 * (-4) * \dots * 2019 * (-2020)$.

III. Feladatsor

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$ függvény!
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $f'(x) = -x(x+2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Határozzátok meg az f függvény grafikus képehez húzott vízszintes aszimptóta egyenletét a $+\infty$ felé.
- 5p** c) Igazoljátok, hogy $0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$, bármely $x, y \in [-2, +\infty)$.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 e^x$ függvény!

- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \frac{1}{4}$.
- 5p** b) Számítsátok ki $\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx$.
- 5p** c) Igazoljátok, hogy az f függvény bármely primitív függvényének csak egyetlen inflexiós pontja van.