

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Mutasd ki, hogy az $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n-1 < 2\}$ halmaz elemei négyzetének összege egyenlő 5.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 5$ függvény, ahol m valós szám. Határozd meg az m valós számot, ha tudjuk, hogy az f függvényhez rendelt parabola csúcsának abszcisszája 3.
- 5p 3. Oldd meg a $\sqrt{x+2} = \sqrt{8-x}$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Határozd meg egy 12 elemes halmaz 10 elemből álló részhalmazainak a számát!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(5,1)$, $B(-1,3)$ és $C(8,10)$ pontok. Határozd meg az AC egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét, mely áthalad CD szakasz felezőpontján, ahol D az AB szakasz felezőponja!
- 5p 6. Számítsd ki az $S = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos 2020\pi$ összeget!

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak az $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = -4$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $\det(A(x)A(y) - A(2xy)) = 0$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Határozd meg az n természetes szám értékét, ha tudjuk, hogy $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right) + A(2)A\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right) = nI_3$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = (\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y})^5$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $2^5 * 3^5 = 5^5$.
- 5p b) Határozd meg az x valós számot, ha tudjuk, hogy $2^5 * x^5 * (243x^5) = 100000$.
- 5p c) Tekintsük az $M = 1^5 * 2^5 * \dots * 10^5$ és $N = 5^5 \cdot 11^5$ számokat. Bizonyítsd be, hogy $M - N = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez tartozó vízszintes aszimptota egyenletét $+\infty$ felé!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy az f függvény grafikus képe **nem** metszi az Ox tengelyt!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{4}{3}$.

5p b) Számítsd ki az $\int_{-1}^1 |x f(x)| dx$ integrált!

5p c) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}$.