

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Efektív munkaidő 3 óra.**

I. Feladatsor

(30 pont)

- 5p** 1. Határozzátok meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány b_7 tagját, tudva hogy $b_5 = 3$ és $b_6 = 6$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 20$ függvény. Határozzátok meg az a valós számokat, tudva hogy $f(a) = a$.
- 5p** 3. Oldjátok meg a valós számok halmazán a $5^x = \frac{1}{5^{3x}}$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozzátok meg hány kétjegyű páraltan természetes szám van, melynek számjegyei az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemei!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ és $C(1, 0)$ pontok. Határozzátok meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit!
- 5p** 6. Számítsátok ki $\cos 2x$ -et, tudva, hogy $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

II. Feladatsor

(30 pont)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok és $M(x) = A + xB$, ahol x valós szám!
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $\det(M(1)) = 0$.
- 5p** b) Igazoljátok, hogy $M(x)M(y) = M(y)M(x)$, akkor és csakis akkor, ha $x = y$!
- 5p** c) Határozzátok meg az (m, n) egész számpárokat, melyekre $M(m^2 + 1)M(n^2) = M(n^2)M(m^2 + 1)$.
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x \circ y = x + y + 7xy$ asszociatív művelet!
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $x \circ y = 7 \left(x + \frac{1}{7}\right) \left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$ bármely x és y valós számok esetén!
- 5p** b) Határozzátok meg az x valós számokat, melyekre $x \circ x = 5$.
- 5p** c) Adjatok példát olyan $a, b \in \mathbb{R} \setminus \emptyset$ különböző számokra, melyekre $a \circ b$ természetes szám!

III. Feladatsor

(30 pont)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$ függvény!
- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Határozzátok meg annak a pontnak az abszcisszáját amelyben f függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az $y = -x$ egyenletű egyenessel!

5p

c) Igazoljátok, hogy $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

2. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény!

5p

a) Mutassátok ki, hogy $\int_1^3 f'(x) dx = 1$.

5p

b) Számítsátok ki $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx$.

5p

c) Határozzátok meg az p valós számot, $p > 1$, tudva, hogy $\int_1^p xf(x) dx = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{3}{4}$.