Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=(2-1)(2+1)=$	**3p**
	$=1\cdot 3=3$	**2p**
2.	$x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=2$	**2p**
3.	$4(6-x)=x+14 \Rightarrow 24-4x=x+14 \Leftrightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$\vec{u}+\vec{v}=(a+2)\vec{i}+(a+2)\vec{j}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	Cum $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$\begin{cases}x-y=1\\2x+y-z=4\\-3x-y+z=1\end{cases}$ și $\det(A(-1))=-1\neq 0$, deci sistemul de ecuații admite soluție unică	**2p**
	$x=-5,\ y=-6,\ z=-20$	**3p**
c)	$A(p)=\begin{pmatrix}1&p&0\\2&1&p\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(p))=-3p^2-p+1$, unde p este număr rațional	**2p**
	$-3p^2-p+1=0 \Leftrightarrow p=-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\notin\mathbb{Q}$ sau $p=-\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\notin\mathbb{Q}$, deci, pentru orice număr rațional p, $\det(A(p))\neq 0$, adică matricea $A(p)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=xy-101x-101y+10201+101=x(y-101)-101(y-101)+101=$	**3p**
	$=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

b)	Elementul neutru al legii „$*$” este $e = 102$	**2p**
	$x = x' \Leftrightarrow x * x = 102 \Leftrightarrow (x-101)^2 = 1$, de unde obținem $x = 100$ sau $x = 102$	**3p**
c)	$x * y = 202 \Leftrightarrow (x-101)(y-101)+101 = 202 \Leftrightarrow (x-101)(y-101) = 101$	**2p**
	Cum x și y sunt numere întregi cu $x < y$ și 101 este număr prim, obținem $x = 0$ și $y = 100$ sau $x = 102$ și $y = 202$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f este egală cu $f'(0) = e^0 - 1 = 0$	**2p**
b)	$f''(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x) > 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -4$, obținem $f(x) \ge -4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$f(-x) \ge -4$, deci $e^{-x} \ge -x + 1$, de unde $e^x(1-x) \le 1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2+4}{x} - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2} \Big\vert_1^3 =$	**3p**
	$= \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx = \int_2^6 \frac{2x}{x^2+4} dx = \ln\left(x^2+4\right) \Big\vert_2^6 =$	**3p**
	$= \ln 40 - \ln 8 = \ln 5$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x\,dx = \int_1^e x \ln x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big\vert_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big\vert_1^e = \frac{e^2+1}{4}$	**3p**
	$\dfrac{e^2+1}{4} = \dfrac{e^2+1}{a}$, deci $a = 4$	**2p**