

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Adottak a $z_1 = 3 - 3i$ és $z_2 = 5 - 6i$ komplex számok. Igazold, hogy $2z_1 - z_2 = 1$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, $f(x) = x + 15$ függvény. Határozd meg az m valós számot, ha tudjuk, hogy $f(m) + f(m+1) = 35$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy számot a háromjegyű természetes számok halmazából, ez a szám 25 többszöröse legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(6,4)$, $B(-2,6)$ és $C(a,b)$ pontok. Határozd meg az a és b valós számokat, tudva, hogy $\overline{AC} = \overline{CB}$.
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AB = 4$. Ha tudjuk, hogy az ABC_{Δ} területe 6, számítsd ki a BC oldal hosszát!

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix és a következő egyenletrendszer:
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 2x + (a+1)y + az = 3, \\ ax + 6y + 4z = a + 3 \end{cases}$$
 ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, bármely a valós szám esetén!
- 5p b) Igazold, hogy **nem** létezik olyan a valós szám, amelyre $(A(4) - A(1)) \cdot A(a) = A(a) \cdot (A(4) - A(1))$.
- 5p c) Határozd meg azokat az a egész számokat, amelyekre az egyenletrendszernek egy (x_0, y_0, z_0) megoldása van, és x_0, y_0, z_0 egész számok!
2. Az $M = (-10, 10)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \frac{100(x+y)}{xy+100}$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $3 * 0 = 3$.
- 5p b) Tekintsük az $f: M \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{10-x}{10+x}$ függvényt. Bizonyítsd be, hogy $f(x * y) = f(x)f(y)$, bármely $x, y \in M$ esetén!
- 5p c) Határozd meg $x \in M$, ha tudjuk, hogy $\underbrace{x * x * \dots * x}_{11\text{-szer } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = e^x(x-3)(x+1)$, $x \in \mathbb{I}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képén, azon pontok abszcisszáit, amelyekben a függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az $y = 2020$ egyenletű egyenessel!
- 5p c) Határozd meg az a valós szám azon értékeit, amelyekre az f függvény grafikus képe pontosan

három pontban metszi az $y = a$ egyenletű egyenest!

2. Adott az $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye szigorúan növekvő az $(1, +\infty)$ intervallumon!

5p b) Számítsd ki: $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (f(x) - \ln x) dx$.

5p c) Határozd meg az a valós számot, $a > e$, tudva, hogy $\int_e^a \ln x dx = 2a$.