Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Mutassátok ki , hogy $(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=3$.

5p **2.**Adott a következő függvény $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Oldjátok meg az $f(x)=x$ egyenletet a valós számok halmazán.

5p **3.** Oldjátok meg a $2\sqrt{6-x}=\sqrt{x+14}$ egyenletet a valós számok halmazán.

5p **4.** Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy tetszőlegesen választva egy számot a kétjegyü természetes számok halmazából, abban a tizesek számjegye 2-vel kisebb legyen mint az egyesek számjegye. .

5p **5.** Határozzátok meg az a valós számot, úgy hogy $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$, ahól $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ és $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6**. Mutassátok ki , hogy $\operatorname{tg}x=\frac{3}{4}$, tudva hogy $\sin x=\frac{3}{5}$ és $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Adott a következő egyenletrendszer $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+y+az=4 \\ -3x-y+z=1 \end{cases}$,ahól a egy valós szám és $A(a)$ az együtthatók mátrixa.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Ha $a=-1$, határozzátok meg az egyenletrendszer megoldását.

5p **c)** Bizonyítsátok be, hogy, bármely p racionális számra, az $A(p)$ mátrix invertálható.

2. A valós számok halmazán értelmezett a következő semleges elemmel rendelkező asszociatív művelet $x*y=xy-101x-101y+10302$.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $x*y=(x-101)(y-101)+101$, bármely x és y valós számra.

5p **b)** Határozzátok meg azokat a valós számokat amelyek egyenlők szimetrikusaikkal a „$*$” műveletre nézve.

5p **c)** Határozzátok meg az x és y egész számokat, $x<y$, amelyekre teljesül $x*y=202$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-5$ függvényt.

5p **a)** Határozzátok meg az f függvény $x=0$ abszcisszájú pontjában húzott érintő iránytényezőjét.

5p **b)** Bizonyítsátok be, hogy f konvex $\mathbb{R}$ -en.

5p **c)** Bizonyítsátok be, hogy $e^x(1-x)\le 1$, bármely x valós számra.

2. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$ függvényt.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Számítsátok ki $\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx$.

5p **c)**Határozzátok meg azt az a nullától különböző valós számot tudva , hogy

$\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{a}$.