Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Határozd meg a $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$ komplex szám valós részét!

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5-2x$ függvény. Igazold, hogy $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}=2$ egyenletet!

5p **4.** Adott az $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ halmaz. Határozd meg az A halmaz azon 3 elemű részhalmazainak számát, amely pontosan 2 páratlan számot tartalmaz!

5p **5.** Adott az ABC háromszög és az M, N és P pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}$. Tudva, hogy O a sík egy tetszőleges pontja, igazold, hogy $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$!

5p **6.** Tudva, hogy $x\in(\pi,2\pi)$ és $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$, számítsd ki a $\sin x$ értékét.

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a és b valós számok.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Ha $a=-1$ és $b=-2$ oldd meg az egyenletrendszert!

5p **c)** Határozd meg az a és b valós számokat úgy, hogy az egyenletrendszer összeférhető és határozatlan legyen.

2. A $G=(1,+\infty)$ halmazon értelmezzük az $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$ bármely $x,y\in G$ esetén.

5p **b)** Határozd meg a "$*$" művelet semleges elemét!

5p **c)** Tudva, hogy $(G,*)$ egy csoport igazold, hogy az $f:M\to G,\ f(x)=\sqrt{x+1}$ függvény egy izomorfizmust valósít meg az $(M,\cdot)$ és $(G,*)$ csoportok között, ahol $M=(0,+\infty)$ és a "$\cdot$" a valós számok szorzási műveletét jelenti.

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)e^{-x}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=-xe^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Számítsd ki $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}$.

5p **c)** Határozd meg az m valós szám azon értékeinek halmazát, amelyre az $f(x)=m$ egyenletnek két egymástól különböző megoldása van!

2. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x)-x)\,dx = 2\ln 2$

5p **b)** Számítsd ki $\int_1^e \left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$

5p **c)** Határozd meg az $a\in(0,+\infty)$ értékét úgy, hogy $\int_0^1 2f(x)F(x)\,dx=\dfrac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$ legyen, ahol F a f függvény azon primitív függvénye, amelyre $F(0)=0$.