Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Effektiv munkaidő 3 óra**

I FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Számítsátok ki az $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány első öt tagjának összegét, ha $a_1=5$ és a különbség $r=2$.

5p **2.** Határozzátok meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az $x^2-ax+a-1=0$ egyenletnek különböző valós megoldásai vannak.

5p **3.** Oldjátok meg a valós számok halmazán a $3-\sqrt[3]{x^2+x+2}=1$ egyenletet.

5p **4.** Számítsátok ki $2C_4^3-3V_4^2$.

5p **5.** Adottak az $\vec{u}=\vec{i}+a\vec{j}$ és $\vec{v}=2\vec{i}+(a^2+1)\vec{j}$ vektorok, ahol a valós szám. Határozzátok meg azt az a valós számot, amelyre az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok kollineárisak.

5p **6.** Adott az ABC hegyesszögű háromszög, ahol $AB=8$, $BC=8$ és a területe 16. Határozzátok meg a B szög mértékét.

II FELADATSOR (30 pont)

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ és $M(x,y)=xI_2+yA$ mátrixok, ahol, x és y valós számok.

5p a) Igazoljátok, hogy $\det A=-1$.

5p b) Igazoljátok, hogy $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, bármely a,b,x és y valós szám esetén.

5p c) Határozzátok meg az (x,y) valós számpárokat, tudva azt, hogy $\det(M(x,y))=4$ és az $M(x,y)\cdot M(x,y)$ mátrix elemeinek összege 8-al egyenlő.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=x+y-1$ és $x\circ y=xy-x-y+2$ műveleteket.

5p a) Igazoljátok, hogy $2\circ(1*3)=(2\circ 1)*(2\circ 3)$.

5p b) Határozzátok meg azokat az x valós számokat, amelyekre $3^{x\circ x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x*x}$.

5p c) Határozzátok meg azokat az x,y valós számokat, amelyekre $(x-1)*(2y+1)=2$ és $(x+y)\circ 4=10$

III FELADATSOR (30 pont)

1. Legyen az $f:R\to R, f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p a) Igazoljátok, hogy az f függvény folytonos az R –en.

5p b) Igazoljátok, hogy bármely a, $a>1$ valós szám esetén a függvény grafikonjának $A(a,f(a))$ pontján keresztül a grafikus képéhez húzott érintő **nem** párhuzamos az Ox tengellyel.

5p c) Bizonyítsátok be, hogy az f függvény konvex az $(1,+\infty)$ intervallumon.

2. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x}+x+1$ és $g:(0,+\infty)\to R$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2x}{2x}$ függvényeket.

5p a) Bizonyítsátok be, hogy az f függvény a g függvény egy primitív függvénye.

5p b) Számítsátok ki $\int_1^4 g(x)dx$ értékét.

5p c) Határozzátok meg azt az $m,\ m > 1$, valós számot, amelyre $\int_1^m f(x)g(x)dx = 20$.