Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT **(30 pont)**

5p **1.** Határozd meg az $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ valós szám egész részét!

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x$ függvény. Határozd meg az f függvény grafikus képének az $y=2x-3$ egyenletű egyenessel való metszéspontjainak abszcisszáit!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $4^{x-2}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{7-2x}$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg az $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ halmaz háromelemű részhalmazainak számát!

5p **5.** Az xOy koordináta rendszerben adottak az $A(1,3)$ és $B(2,5)$ pontok. Határozd meg azon C pont koordinátáit, amelyre $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Számítsd ki az ABC háromszög kerületét tudva, hogy $AB=2$, $AC=3$ és $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

II. FELADAT **(30 pont)**

1. Adottak az $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ és az $\left(A(a)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a egy valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Igazold, hogy bármely q racionális szám esetén az $A(q)$ mátrix invertálható!

5p **c)** Tekintsük a $B(a)=A(a)-\left(A(a)\right)^t$ mátrixot. Határozd meg azokat a p racionális számokat, amelyekre $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

2. A $G=(0,1)$ halmazon értelmezzük az $x*y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$.

5p **b)** Ellenőrizd, hogy az $e=\dfrac{1}{2}$ a "$*$" művelet semleges eleme-e!

5p **c)** Tudva, hogy $(G,*)$ egy csoport igazold, hogy az $f:G\to M$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ függvény egy izomorfizmust valósít meg a $(G,*)$ és $(M,\cdot)$ csoportok között, ahol $M=(0,+\infty)$ és a "$\cdot$" a valós számok szorzási műveletét jelenti.

III. FELADAT **(30 pont)**

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=1+\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az $m\in(0,+\infty)$ értékét, amelyre az f függvény grafikus képéhez az $M\left(m,f(m)\right)$ pontban húzott érintő párhuzamos az $y=2x$ egyenletű egyenessel.

5p **c)** Igazold, hogy $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Számítsd ki $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Minden n nem nulla természetes szám esetén tekintsük az $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^n dx$ számot. Igazold, hogy az $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens!