

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq \sqrt{5}\}$ halmaz elemeinek összegét!
- 5p 2. Határozd meg az m és n valós számokat tudva, hogy $f(1) = 2$ és $f(2) = 1$, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $16^x + 2 \cdot 4^x - 8 = 0$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy számot választva a háromjegyű természetes számok halmazából, annak a századok helyén álló számjegye prímszám legyen!
- 5p 5. Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, amelynek átlói az O pontban metszik egymást. Igazold, hogy $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.
- 5p 6. Határozd meg a $\sin x$ értékét tudva, hogy $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ és $\cos x = \frac{4}{5}$.

II. FELADAT

(30 punct)

1. Adottak az $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a-3 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és a $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a - 1 \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a egy valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = 5$.
- 5p b) Határozd meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az egyenletrendszer összeférhető és határozott.
- 5p c) Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az egyenletrendszernek egyetlen (x_0, y_0, z_0) megoldása van és x_0 , y_0 és z_0 ebben a sorrendben egy számtani haladvány egymást követő tagjai.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - \frac{xy}{3}$ asszociatív és semleges elemmel rendelkező műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $1 * 3 = 3$.
- 5p b) Határozd meg azt az x valós számot, amelyre $x * x * x = \frac{26}{9}$.
- 5p c) Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyeknek a "*" műveletre vonatkozó szimmetrikusai természetes számok.

III. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4 \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez húzott függőleges aszimptótájának egyenletét.
- 5p c) Igazold, hogy bármely n , $n \geq 2$ természetes szám esetén az $f(x) - n = 0$ egyenletnek két különböző valós megoldása van!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^2 f(x) e^{-x} dx = 4$.

5p b) Számítsd ki $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) F(x) dx = 2(e-3)^2$, ahol $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a f függvénynek azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$.