**Examenul de bacalaureat naţional 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Test 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Effektiv munkaidő 3 óra**

**I FELADATSOR** **(30 pont)**

**5p** 1.Igazoljátok: $\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=2$.

**5p** **2.** Határozzátok meg az $m$ valós szám azon értékeinek halmazát, amelyekre az $x^2+mx-m=0$ egyenletnek **nincsenek** valós megoldásai.

**5p** **3.** Oldjátok meg a valós számok halmazán a $3^{x^2-20}=\dfrac{1}{81}$ egyenletet.

**5p** **4.** Számitsátok ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy $n$ számot az egyjegyű természetes számok halmazából az teljesitse az $n!\le n(n-1)$ egyenlőtlenséget.

**5p** **5.** Az $xOy$ derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-4,0)$, $B(0,4)$ és $O(0,0)$ pontok. Határozzátok meg a C pont koordinátáit , tudva azt, hogy $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ .

**5p** **6**. Határozzátok meg az $a$, $a>1$ valós számot, tudva azt, hogy $a-1$, $2a$ și $2a+1$ egy derékszögű háromszög oldalainak hossza.

**II FELADATSOR** **(30 pont)**

**1.** Legyen az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol $a\in(0,+\infty)$.

**5p** **a)** Igazoljátok, hogy $\det\left(A(e)\right)=e$.

**5p** **b)** Bizonyítsátok be, hogy $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, minden $a\in(0,+\infty)$ esetén.

**5p** **c)** Határozzátok meg azokat az $a,b\in(0,+\infty)$ számokat, amelyekre $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

**2.** A valós számok halmazán adott az $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$ asszociatív művelet.

**5p** **a)** Igazoljátok, hogy $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

**5p** **b)** Bizonyítsátok be, hogy $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, minden $x$ és $y$ valós szám esetén.

**5p** **c)** Számítsátok ki $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

**III FELADATSOR** **(30 pont)**

**1.** Adott az $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$ függvény.

**5p** **a)** Mutassátok ki, hogy $f$ folytonos az $R$ – en.

**5p** **b)** Bizonyitsátok be, hogy $f$ növekvő a $(-\infty,1)$ intervallumon.

**5p** **c)** Bizonyitsátok be, hogy $f(x)\le 1$, minden $x$ valós szám esetén.

**2.** Legyen az f: (-1,+∞) →R, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

**5p** **a)** Mutassátok ki, hogy $\int_0^1 (x+1)(x+3) f(x)dx = 5$.

**5p** **b)** Számitsátok ki $\int_0^2 f(x)dx$ értékét.

**5p** **c)** Bizonyitsátok be, hogy az $f$ függvény bármely $F: (-1, +\infty) \to R$ primitív függvénye konkáv.