

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} < 2$
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ függvény. Határozd meg azon pontok abszcisszáinak a szorzatát, amelyben az f függvény grafikus képe az Ox tengelyt metszi!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $3^x + 3^{x-2} + 3^{x+2} = 91$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg a $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^9$ kifejtésének azt a tagját, amely **nem** tartalmazza az x -et, ha $x \in (0, \infty)$.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ és $C(3, 2)$ pontok. Írd fel az OG egyenes egyenletét, tudva, hogy G az ABC háromszög súlypontja.
- 5p 6. Számítsd ki az ABC háromszög köré írható kör sugarát, tudva, hogy $AB = 2$ és $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

II. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a egész szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = 7$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az $A(a)$ mátrix rangja 3, bármely a egész szám esetén.
- 5p c) Határozd meg az m egész számot, amelyre az $A(m)$ mátrix inverz mátrixának minden eleme egész szám.
2. A $M = (0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$ asszociatív műveletet.
- a) Igazold, hogy $2 \circ 2 = 1$.
- b) Bizonyítsd be, hogy $x \circ y \circ z = (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^{-1}$, bármely $x, y, z \in M$ esetén.
- 5p c) Bizonyítsd be azt, hogy $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} = \frac{1}{54}$.

III. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $f: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$, $x \in (1, \infty)$.

- 5p** b) Igazold, hogy az f függvény bijektív.
- c) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x))$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6}$
- 5p** b) Igazold, hogy $\int_1^e \frac{f(x)}{x} \ln x dx = \frac{e^2 - 7}{4}$
- 5p** c) Határozd meg azokat az a valós számokat, $a > 1$, amelyekre $\int_1^a f(x)e^x dx = e^a - 3e$.