Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Effektiv munkaidő 3 óra**

I FELADATSOR (30 pont)

5p	**1.** Hasonlítsátok össze a $\log_2 16$ és $\sqrt[3]{125}$ számokat.
5p	**2.** Tekintsük az $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + (a+2)x + 2a + 1$, ahol a valós szám. Határozzátok meg azokat az a valós számokat, amelyekre az f függvény grafikus képe érinti az Ox tengelyt.
5p	**3.** Oldjátok meg a valós számok halmazán az $5^{x^2-x-2} = 5^{3x-5}$ egyenletet.
5p	**4.** Bizonyítsátok be, hogy a C_4^1 , V_4^2 és V_5^2 egy számtani haladvány egymás utáni tagjai.
5p	**5.** Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-1,1)$, $B(1,a)$ és $C(4,2a+1)$, ahol a valós szám. Határozzátok meg azt az a valós számot, amelyre az A, B és C pontok kollineárisak.
5p	**6**. Határozzátok meg az MNP háromszög köré írt kör sugarát tudva azt, hogy $MN = 16$ és $m(\hat{P}) = 30°$.

II FELADATSOR (30 pont)

	1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} x + ay - z = a \\ x - y - az = -1 \\ ax - y + z = -1 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.
5p	**a)** Mutassátok ki, hogy $\det(A(1)) = -4$.
5p	**b)** Határozzátok meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az $A(a)$ mátrix invertálható.
5p	**c)** Igazoljátok, hogy az egyenletrenszernek **nincs** egyetlen olyan (x_0, y_0, z_0) megoldása sem, amelyre $x_0 = y_0 = z_0$.
	2. A valós számok halmazán értelmezett a $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}$ asszociatív művelet.
5p	**a)** Mutassátok ki, hogy $2020 * (-2020) = 2$.
5p	**b)** Határozzátok meg a „$*$” művelet semleges elemét.
5p	**c)** Tudva azt, hogy $(R,*)$ csoport bizonyítsátok be, hogy az $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 8$ függvény az $(R,*)$ és $(R,+)$ csoportok közötti morfizmus.

III FELADATSOR (30 pont)

	1. Legyen az $f: (-2,+\infty) \to R$, $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4}$ függvény.
5p	**a)** Mutassátok ki, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\, f(x)) = 2$.
5p	**b)** Bizonyítsátok be, hogy az f csökkenő a $(-2,+\infty)$ intervallumon.
5p	**c)** Határozzatok meg olyan $x \in [-1,+\infty)$, amelyre $f(x) \in Z$.
	2. Tekintsük az $f: R \to R$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ függvényt.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)}\,dx = e^2 - 1$.

5p **b)** Számítsátok ki: $\int_0^1 e^{3x} f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Legyenek az a, b és c pozitív valós számok. Bizonyítsátok be, hogy ha $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ és $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ egy mértani haladvány egymás utáni tagjai akkor a, b és c egy számtani haladvány egymás utáni tagjai.