Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.**
- **Effektiv munkaidő 3 óra**

I FELADATSOR (30 pont)

5p 1. Határozzátok meg az a valós számot, $a>1$, amelyre az $a-1$, 3 és $a+7$ egy mértani haladvány egymást követő tagjai.

5p **2.** Határozzátok meg az $f:R\to R$, $f(x)=x^2-6$ és $g:R\to R$, $g(x)=-x-3$ függvények metszéspontjainak abszciszáinak az összegét.

5p **3.** Oldjátok meg a valós számok halmazában a $3^{x+2}-3^x-8=0$ egyenletet.

5p **4.** Számítsátok ki annak a valószinüségét, hogy kiválasztva egy n számot az $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ halmazból, az teljesítse a következő $C_n^2\le 3C_n^1$ egyenlőtlenséget.

5p **5.** Határozzátok meg az m valós számokat, $m\ne 2$, amelyekre az $\vec{u}=4\vec{i}+m\vec{j}$ és $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+2\vec{j}$ vektorok kollineárisak.

5p **6.** Határozzátok meg az ABC háromszög kerületét, ha tudjuk hogy, $AB=5$, $AC=4$ és m($\hat{A}$) =60°.

II FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $\begin{cases}(m^2-1)x+my+4z=1\\ x+y+z=0\\ mx+3y+z=-1\end{cases}$, egyenletrendszer , ahol az m egy valós szám.

5p **a)** Határozzátok meg az m valós számot, ha tudjuk, hogy $(-1,0,1)$ az egyenletrendszer megoldása.

5p **b)** Határozzátok meg az m valós szám értékeit amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

5p **c)** Határozzátok meg az m egész számokat, m∈Z\{-7,2}, amelyekre az (x_0,y_0,z_0) megoldása az egyenletrendszernek, ahol x_0 , y_0 , $z_0\in Z$.

2.A valós számok halmazán értelmezzük a következő asszociatív műveletet, $x\circ y=x+y+11xy$.

5p a)Bizonyítsátok be, hogy az $x\circ y=11\left(x+\frac{1}{11}\right)\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}$, bármely x és y valós számok esetén.

5p **b)** Határozzátok meg az x valós számokat amelyekre $x\circ x=\frac{8}{11}$.

5p **c)**Számítsátok ki az $a=\left(1-\frac{1}{11}\right)\circ\left(1-\frac{2}{11}\right)\circ\left(1-\frac{3}{11}\right)\circ\left(1-\frac{4}{11}\right)$szám egész részét.

III FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$ függvény.

5p **a)**Bizonyítsátok be, hogy $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozzátok meg az f függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$ pontban.

5p **c)** Bizonyítsátok be, hogy $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\geq -1$, bármely $x\in(0,+\infty)$.

2. Adottak $f_n:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}$, függvények,minden n természetes szám esetén.

5p **a)** Határozzátok meg a G: $(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ függvényt , a g : $(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ függvény primitív függvényét ha $g(x)=\left(x^3+1\right)f_3(x)$, és tudjuk hogy $G(0)=2020$.

5p **b)** Számítsátok ki az $\int_0^1 f_1(x)dx$ értékét.

5p **c)** Bizonyítsátok be, hogy $\int_0^1 f_n(x)dx\leq\frac{1}{n+1}$, bármely n természetes szám esetén.