

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Igazold, hogy $\log_2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = -\log_2(\sqrt[3]{2} - 1)$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, függvény, ahol a valós szám. Határozd meg az a valós számot, úgy, hogy $f(x) + f(-x) = 2020$, bármely x valós szám esetén.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazában a $3^x + 3^{1-x} = 4$ egyenletet.
- 5p 4. Számítsd ki a valószínűségét annak, hogy kiválasztva egy tetszőleges számot a kétjegyű természetes számok halmazából, az $\sqrt{122}$ és $\sqrt{170}$ között helyezkedjen el.
- 5p 5. Adott az $ABCD$ paralelogramma. Igazold, hogy $\overline{AB} + 2\overline{BD} + 3\overline{DA} = \overline{CA}$.
- 5p 6. Egy háromszög oldalainak hossza 2, 3 és 4. Igazold, hogy a háromszög tompaszögű.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.
- 5p a) Igazold, hogy $\det A = \det(A + I_2)$.
- 5p b) Határozd meg az a valós számot, ha tudjuk, hogy $A \cdot A \cdot A = aI_2$.
- 5p c) Határozd meg azokat az (m, n) természetes számpárokat, ahol $m \neq n$, amelyekre $\det(A + mI_2) = \det(A + nI_2)$.
2. Az $M = (0,1)$ halmazon értelmezzük az $x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$ műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $x \circ \frac{1}{2} = x$, bármely $x \in M$ esetén.
- 5p b) Igazold, hogy a „ \circ ” művelet kommutatív.
- 5p c) Tekintsük az $f: (0, +\infty) \rightarrow (0,1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ függvényt. Igazold, hogy $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, bármely $x, y \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x}$ függvényt.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Igazold, hogy az f grafikonjához az $A(1, f(1))$ pontba húzott érintő párhuzamos az f grafikonjának $+\infty$ -be mutató ágának aszimptotájával.
- 5p c) Igazold, hogy $g'(x) + g(x) = \frac{1}{e^x}$, bármely x valós szám esetén, ahol $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f''(x)$.
2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 3$.

5p b) Számítsd ki $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Határozd meg az a valós számot, amelyre $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x dx = e^2 + a$.