

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Igazold, hogy az $N = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{13})^2$ szám egy természetes szám négyzete!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$ függvény, ahol a egy valós szám. Határozd meg az a valós szám értékét, ha tudjuk, hogy $(f \circ f)(1) + f(1) = 1$.
- 5p 3. Oldd meg a $4^x + 4^{1-x} = 4$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Határozd meg az $A = \{0, 5, 7\}$ halmaz elemeiből képezhető, különböző számjegyekből álló háromjegyű természetes számok számát!
- 5p 5. Legyen G az ABC háromszög súlypontja és M az AG szakasz felezőpontja. Igazold, hogy $\overline{6AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 5p 6. Számítsd ki az ABC hegyesszögű háromszög A szögének mértékét, ha tudjuk, hogy $4 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC} = AB \cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a egy valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = -15$.
- 5p b) Határozd meg azt az a valós számot, amelyre az $A(a)$ mátrix rangja **nem** egyenlő 3-mal!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy az $M = A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1)$ mátrix minden eleme egész szám és osztható 25-tel!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2020}$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $x * (-x) = \sqrt[3]{2020}$, bármely x valós szám esetén!
- 5p b) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{2021}$.
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy bármely a valós szám esetén, egyetlen olyan x valós szám létezik, amelyre $x * x * x = a$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty, 2]$ intervallumon!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 5} dx = 4$.

5p b) Számítsd ki: $\int_{-4}^1 f(x) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = 6 - 2\sqrt{5}$.