

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_tehnologic*

Test 12

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÉTEL (30 punct)

- 5p 1. Mutassátok ki, hogy  $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} : 0,5\right) \cdot \frac{12}{13} = 1$ .
- 5p 2. Mutassátok ki, hogy  $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 4$ , ahol  $x_1$  és  $x_2$  az  $x^2 - 7x + 10 = 0$  egyenlet megoldásai.
- 5p 3. Oldjátok meg a valós számok halmazán a  $\sqrt{5x+1} = 6$  egyenletet.
- 5p 4. Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy találomra kiválasztva egy kétjegyű számot, az többszöröse legyen a 11-nek.
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta rendszerben adottak az  $A(6,0)$  és  $B(0,8)$  pontok. Határozzátok meg az AOB háromszög O csúcsából húzott magasságának hosszát.
- 5p 6. Számítsátok ki az  $A$ -ban derékszögű  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalának hosszát tudva, hogy  $BC = 5\sqrt{2}$  és  $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$ .

II. TÉTEL (30 punct)

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  és  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok.
- 5p a) Mutassátok ki, hogy  $\det A = 1$ .
- 5p b) Mutassátok ki, hogy  $2A - A \cdot A = I_2$ .
- 5p c) Határozzátok meg az  $x$ ,  $y$  és  $z$  valós számokat, amelyekre  $A \cdot \begin{pmatrix} x-2 & y \\ z+1 & 1 \end{pmatrix} - I_2 = O_2$ .
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x \circ y = xy + x^2 + y^2 - 1$  műveletet.
- 5p a) Mutassátok ki, hogy  $1 \circ (0 \circ 2) = 12$ .
- 5p b) Határozzátok meg azon  $x$  valós számokat, amelyekre  $x \circ (-x) = 3$ .
- 5p c) Határozzátok meg azon  $(m, n)$  valós számpárokat, amelyekre  $m \circ n = -mn$ .

III. TÉTEL (30 punct)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  függvény.

5p  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}.$

a) Mutassátok ki, hogy

5p b) Számítsátok ki  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}.$

5p c) Igazoljátok, hogy  $f$  konvex a  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  intervallumon.

2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + 3x$  függvény.

5p a) Mutassátok ki, hogy  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^2 - 3x) dx = 0.$

5p b) Mutassátok ki, hogy  $\int_0^1 (f(x) - x^3 - x^2) e^x dx = 3.$

5p c) Legyen  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  függvény primitív függvénye, melyre  $F(0) = 1.$  Bizonyítsátok be, hogy

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}.$$