

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Mutassátok ki, hogy $\sqrt{11} - \sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ és $\sqrt{11} + \sqrt{5}$ egy mértani haladvány egymás utáni tagjai.
- 5p 2. Adott az $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ függvény. Igazoljátok, hogy f páratlan.
- 5p 3. Oldjátok meg a valós számok halmazán a $4^x + 2^x = \frac{3}{4}$ egyenletet.
- 5p 4. Határozzátok meg az $\{1, 3, 5, 7\}$ halmaz háromelemű, rendezett részhalmazainak számát.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-1, -2)$, $B(0, 3)$ és $C(-1, 2)$ pontok. Határozzátok meg az AD egyenes egyenletét tudva, hogy $ABCD$ paralelogramma.
- 5p 6. Az ABC háromszögben $AB = 10$ és $AC = 5$. Mutassátok ki, hogy $\sin C = 2 \sin B$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 3y = 1 \\ 2x + 4y + az = -2 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.
- 5p a) Mutassátok ki, hogy $\det(A(a)) = a + 2$, bármely a valós szám esetén.
- 5p b) Ha $a = 0$, határozzátok meg az $A(a)$ mátrix inverzét.
- 5p c) Ha $a \neq -2$, oldjátok meg az egyenletrendszert.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = 5(x + 2)(y + 2) - 2$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Mutassátok ki, hogy $x * (-2) = -2$, bármely x valós szám esetén.
- 5p b) Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 10}{5}$ függvény. Igazoljátok, hogy $f(x + y) = f(x) * f(y)$, bármely x és y valós szám esetén.
- 5p c) Határozzátok meg az x valós számot úgy, hogy $x * x * x = 23$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$ függvény.
- 5p a) Mutassátok ki, hogy $f'(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Igazoljátok, hogy az Ox tengely az f grafikus képének $+\infty$ felé tartó vízszintes aszimptotája.
- 5p c) Mutassátok ki, hogy az f függvény képhalmaza a $(0, +\infty)$ intervallum.
2. Adottak az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x + 1)}$ és $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - \ln(x + 1)$ függvények.
- 5p a) Mutassátok ki, hogy a F függvény a f függvény egy primitív függvénye.
- 5p b) Számítsátok ki $\int_1^2 (x + 1) f(x) dx$.
- 5p c) Határozzátok meg az a valós számot, $a > 1$ úgy, hogy $\int_1^a f(x) dx = \frac{1}{2} - \ln \frac{a + 1}{2}$.