

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÉTEL

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy $(2 + 3i)^2 = i(5i + 12)$, ahol $i^2 = -1$.
- 5p 2. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$ függvény. Határozd meg az a valós számot, melyre $(f \circ f)(x) = f(x + 1)$, igaz bármilyen x valós szám esetén.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet $5 \cdot 2^{x+1} \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x$.
- 5p 4. Hány olyan $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ függvény van, mely teljesíti $f(1) \geq 3$ feltételt.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(-1, 3)$ és $C(-2, 4)$ pontok, melyek az $ABCD$ rombusz csúcspontjai. Számold ki a BD egyenes irányítányezőjét.
- 5p 6. Határozd meg az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, melyre $\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

II. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x egy valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(x)) = 6^x$, bármilyen valós x értékre.
- 5p b) Milyen x valós számra teljesül az összefüggés $A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x)$.
- 5p c) Igazold, hogy bármely $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixnak, mely teljesíti a feltételt $X \cdot X = A(1)$ két eleme van, melyek irracionális számok.
2. A valós számok halmazán értelmezett a következő művelet $x \circ y = x^2 + xy + y^2$.
- 5p a) Igazod, hogy $x \circ x \geq 0$ bármilyen x valós szám esetén.
- 5p b) Legyen a és b , $a \neq b$ két valós szám. Milyen x valós számra igaz $x \circ a = x \circ b$.
- 5p c) Határozd meg az x valós számot, mely teljesíti $x \circ (x + 1) = -x^3$ összefüggést.

III. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - (x + 1)\ln(x + 1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = 1 - \ln(x + 1)$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait.
- 5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} - e$.
- 5p b) Számold ki $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p c) Minden n zérótól különböző természetes számra legyen $I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx$. Igazold, hogy $I_n + nI_{n-1} = e$, bármilyen n , $n \geq 2$ természetes számra.