

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Határozd meg a z komplex számot, ha $z = 3\bar{z}$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$ függvény, ahol a valós szám. Határozd meg az a valós számot, ha $f(0)$, $f(2)$ és $f(1)$ egy mértani haladvány egymásutáni tagjai!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_3(-x) = \log_3(x^2 - 2x - 2)$ egyenletet!
- 5p** 4. Mennyivel egyenlő annak a valószínűsége, hogy az $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ halmazból egy véletlenszerűen kiválasztott elem négyzete is az A halmaz eleme legyen?
- 5p** 5. Az A , B , C és D pontok úgy helyezkednek el, hogy $\overline{AB} + \overline{CD} = \vec{0}$. Igazold, hogy $\overline{AD} + \overline{CB} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Az ABC hegyesszögű háromszögben $BC = R$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara. Számítsd ki az ABC háromszög A szögének mértékét!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, és a egy valós szám.

- 5p** a) Igazold, hogy bármely valós a esetén $\det(A(a)) = 1$.
- 5p** b) Adott a $B(a) = A(a) - I_3$ mátrix, ahol a egy valós szám. Igazold, hogy bármely valós a esetén $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = O_3$.
- 5p** c) Határozd meg a nullától különböző n természetes számot, ha az X mátrix elemeinek összege 21 és teljesül az $A(2) \cdot X = A(1) + A(2) + \dots + A(n)$ egyenlőség!
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x * y = x^2 + 4xy + y^2$ művelet.
- 5p** a) Igazold, hogy $1 * 2 = 13$.
- 5p** b) Határozd meg mindazon x valós számokat, amelyekre teljesül az $(x * x) * x^2 = 61$ egyenlőség!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy végtelenül sok olyan a irracionális szám létezik, amelyre $a * 1$ természetes szám!

III. FELEDETSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{3(x+1)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy bármely x valós szám esetén $x^5 + 2\sqrt{x^{10}} + 3 \geq 3$.

2. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = \frac{26}{3}$.

5p b) Számítsd ki: $\int_1^2 (f(x) - x^2) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{3 - 4 \ln^2 2}{8}$.