

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Határozd meg az $A = \{x \in \mathbb{Z} / -\sqrt{5} < x < \sqrt{7}\}$ halmaz elemeinek számát
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + a$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2bx + 1$ függvények, ahol a și b valós számok. Határozd meg az a és b valós számok értékét tudva, hogy a két függvényhez rendelt parabola csúcsai egybeesnek.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$ egyenletet.
- 5p 4. Igazold, hogy nincs egyetlen olyan véges halmaz sem, melynek pontosan 12 két elemű részhalmaza van.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(3,4)$, $B(-4,3)$ és $C(5,0)$ pontok. Igazold, hogy a $H(4,7)$ pont az ABC háromszög ortocentruma.
- 5p 6. Számítsd ki $\cos x$ értékét tudva, hogy $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak a következő mátrixok $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = I_3 + A$.
- 5p a) Igazold, hogy $\det A = 0$.
- 5p b) Igazold, hogy az $I_3 - \frac{1}{11}A$ mátrix a B mátrix inverz mátrixa.
- 5p c) Adj példát három olyan $U, V, T \in M_3(\mathbb{R})$ mátrixra melyeknek rangja 1, és amelyekre $U + V + T = B$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 3x - 3y + a$ műveletet, ahol a valós szám.
- 5p a) Határozd meg azt az a valós számot, melyre $(-1) * 1 = 0$.
- 5p b) Határozd meg az a valós számot, melyre a „ $*$ ” műveletnek létezik semleges eleme.
- 5p c) Igazold, hogy ha $a \in [12, +\infty)$, akkor a $[3, +\infty)$ halmaz stabil részhalmaza \mathbb{R} -nek a „ $*$ ” műveletre nézve.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Számítsd ki: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} + f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) \right)^{\sqrt{n}}$.
- 5p c) Igazold, hogy az f függvény bijektív.

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{8}$.

5p c) Legyen F a f egy primitívje, melyre $F(1) = 0$. Számítsd ki: $\int_0^1 F(x) dx$.