

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I.Feladatsor

(30 punct)

- 5p** 1. Határozd meg a $2 + 3\sqrt{5}$ valós szám egész részét!
- 5p** 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$ és $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2 + x$ függvények. Igazold, hogy $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, bármely x valós szám esetén.
- 5p** 3. Oldd meg a $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3}$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p** 4. Adott az $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ halmaz. Határozd meg az A halmaz 2-vel vagy 3-mal osztható elemeinek a számát!
- 5p** 5. Az ABC háromszögben legyen G a háromszög súlypontja, illetve az M és N pontokra teljesül, hogy $\overline{BM} = \frac{1}{4}\overline{BA}$ és $\overline{CN} = \frac{2}{5}\overline{CA}$. Igazold, hogy az M , N és G pontok kollineárisak!
- 5p** 6. Ha ABC egy $\frac{1}{2}$ sugarú körbe írt háromszög, akkor igazold, hogy $\cos^2 A = 1 - BC^2$.

II.Feladatsor

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a egy valós szám.
- 5p** a) Igazold, hogy $\det(A(a)) = 4$, bármely a valós szám esetén!
- 5p** b) Igazold, hogy $A(a) \cdot A(b) = 2A(a+b)$, bármely a és b valós számok esetén.
- 5p** c) Határozd meg az x valós számot és az n természetes számot, ha tudjuk, hogy $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^n A(x)$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = x + y - 7$ műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy $5 \circ 2 = 0$.
- 5p** b) Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + \log_7 x$ függvény. Igazold, hogy $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, bármely $x, y \in (0, +\infty)$ esetén!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $a^2 \circ b^2 \neq 0$, bármely a és b egész számok esetén!

III.Feladatsor

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x-5)$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy $f'(x) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p** c) Igazold, hogy $e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, bármely $x \in (-\infty, 5)$.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény.

- 5p** a) Igazold, hogy $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1} dx = 2$.
- 5p** b) Igazold, hogy $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.
- 5p** c) Határozd meg $a \in (1, +\infty)$ értékét úgy, hogy $\int_0^x f(e^t) dt = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + \ln(a-1)$, bármely x valós számra!