Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I.Feledatsor **(30 pont)**

5p **1.** Ha $z^2+z+2=0$, ahol z komplex szám, akkor mutasd ki, hogy $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{2x\}$ függvény, ahol $\{x\}$ jelöli az x törtrészét. Mutasd ki, hogy $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$ bármely x valós szám esetén!

5p **3.** Oldd meg a $3^{x+1}-3^x=2^{x+2}-2^{x+1}$ egyenletet a valós számok halmazán!

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy a számot az $A=\left\{\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\ldots,\sqrt{25}\right\}$ halmazból, a 3, 4 és a számok egy derékszögű háromszög oldalainak hosszát jelöljék!

5p **5.** Adott az $ABCD$ paralelogramma és az M és N pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Bizonyítsd be, hogy D, M és N pontok kollineárisak!

5p **6.** Ha ABC egy általános háromszög, akkor igazold, hogy $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.

II. Feladatsor **(30 pont)**

1. Adott az $A(m)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&m&1\\1&-3&2\end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases}x+2y+z=0\\2x+my+z=0\\x-3y+2z=0\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol m valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(m))=m-9$ bármely m valós szám esetén!

5p **b)** Határozd meg az m valós számot úgy, hogy az egyenletrendszernek legyen a $(0,0,0)$ megoldástól különböző megoldása!

5p **c)** Ha $m=9$, legyen (x_0,y_0,z_0) az egyenletrendszer egy megoldása, ahol x_0, y_0 és z_0 valós számok és $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Számítsd ki: $\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

2. A egész számok halmazán értelmezzük az $x*y=xy+5x+5y+20$ műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $2*(-1)=23$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy $e=-4$ semleges elem a „$*$” műveletre nézve!

5p **c)** Ha $r\in\{0,1,2\}$, jelölje $A(r)$ azon természetes számok halmazát, amelyeket 3-mal osztva a maradék r. Határozd meg azokat az $r\in\{0,1,2\}$ számokat, amelyekre az $A(r)$ zárt részhalmaza a $\mathbb{Z}$ halmaznak a „$*$” műveletre nézve!

III.Feladatsor **(30 pont)**

1. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\left(e^x-e\right)$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = xe^x - e$, $x \in (-1, +\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét az $x = 1$ abszcisszájú pontban!

5p **c)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontját!

2. Adott az $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\ln(x+2)} dx = \dfrac{\pi}{4}$.

5p **b)** Számítsd ki: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$.

5p **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 \left(f(x) + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+2} \right) dx = \dfrac{\pi}{4} \ln 3$.