Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. TÉTEL (30 pont)

5p **1.** Adott az $(a_n)_{n\ge1}$ számtani haladvány, amelyben $a_1 = 1-3\sqrt{3}$ és az állandó különbség $r=\sqrt{3}$. Igazold, hogy az a_5 törtrészének értéke $\sqrt{3}-1$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ függvény. Igazold, hogy az $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ szám természetes!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_3(5x-1)=2\log_3(x+1)$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg a $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$ tulajdonsággal rendelkező X halmazok számát!

5p **5.** Adottak az $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ és $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$ vektorok, ahol a és b valós számok. Határozd meg az a és b valós számokat tudva, hogy $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$.

5p **6.** Tekintsük az ABC derékszögű, egyenlőszárú háromszöget, amelynek átfogója $BC=8\sqrt{2}$. Igazold, hogy az ABC háromszögbe írt kör sugara $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

II. TÉTEL (30 pont)

1. Adottak az $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ és $A(a)=\begin{pmatrix}1&a\\a^2&a^3\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a egy valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det\left(A(a)\right)=0$, bármely a valós szám esetén!

5p **b)** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $\det\left(A(2)+xI_2\right)=0$.

5p **c)** Igazold, hogy ha $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, akkor $a=b$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy $0*8=4$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy a „$*$” művelet **nem** rendelkezik semleges elemmel!

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan (m,n) nullától különböző természetes számokból álló számpár létezik, amelyre a $m*n$ szám is nullától különböző természetes szám!

III. TÉTEL (30 pont)

1. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $\ln x\ge\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, bármely $x\in[e,+\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy az f függvény bármely primitív függvénye konvex!

5p **c)** Határozd meg az a, b és c valós számokat, ha az $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ függvény a f függvény egyik primitív függvénye!