Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Igazold, hogy ha $z=3+i$, akkor $z^2-6z+10=0$, ahol z komplex szám.

5p **2.** Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x-6$ függvények. Határozd meg az f és g függvények metszéspontjának abszcisszáját.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{2x+3}=x+1$ egyenletet.

5p **4.** Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok közül egyet kiválasztva, ezen szám számjegyeinek szorzata prímszám legyen.

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-1,2)$ és $B(3,-1)$ pontok. Tudva, hogy M az A pont B szerinti szimmetrikusa és N a B pont M szerinti szimmetrikusa, határozd meg az N pont koordinátáit.

5p **6.** Igazold, hogy ha $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin x+\cos x=\cos 2x$, akkor $\sin x-\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Adottak az $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ és $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.

5p **a)** Mutasd ki, hogy $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Igazold, hogy $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, bármely x és y valós számok esetén.

5p **c)** Határozd meg a $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$ mátrix rangját.

2. A racionális számok halmazán értelmezzük a következő műveletet: $x*y=x^2y^2-2x^2-2y^2+6$.

5p **a)** Igazold, hogy $1*1=3$.

5p **b)** Igazold, hogy $x*y\neq 2$, bármely x és y racionális számok esetén.

5p **c)** Határozd meg azon (m,n) egész számokból álló számpárokat, melyekre $m*n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Adott az $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az $a\in(-1,+\infty)$ valós számot tudva, hogy az f függvény grafikus képéhez az $A(a,f(a))$ pontban húzott érintő párhuzamos az $y=3x+2020$ egyenletű egyenessel.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, bármely $x\in(-1,+\infty)$ esetén.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ függvény. Minden nullától különböző n természetes szám esetén tekintsük az $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ számot.

5p **a)** Mutasd ki, hogy $\int_0^3 f^2(x)\,dx=15$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5p **c)** Igazold, hogy $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, bármely n, $n \geq 3$ természetes szám esetén.