

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

18. test

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Minden tétel kötelező. 10 pont jár hivatalból.
- A munkaidő 3 óra.

I. TÉTEL

(30 pont)

- 5p 1. Igazold, hogy az $5 + 2\sqrt{3}$ és $(1 + \sqrt{3})^2$ számok különbsége egész szám!
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + 2x$ függvények. Határozd meg azon m valós számokat, amelyekre $f(m) = g(m)$.
- 5p 3. Oldd meg a $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = \sqrt{2x + 5}$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Számítsd ki a valószínűségét annak, hogy kiválasztva egy a számot az $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazból, teljesüljön a $|a + 1| \geq 2$ egyenlőtlenség.
- 5p 5. Legyen A , B , C és D négy koplanáris pont, M az AD szakasz felezőpontja és N a BC szakasz felezőpontja. Igazold, hogy $2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{DC}$.
- 5p 6. Az ABC háromszög köré írt kör sugara 1. Igazold, hogy $4\sin A \cdot \sin B = AC \cdot BC$.

II. TÉTEL

(30 pont)

1. Adott az $A(a, b) = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a és b valós számok.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(2, 3)) = 0$.
- 5p b) Ha $a \in \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor igazold, hogy az $A(a, b)$ mátrix invertálható.
- 5p c) Határozd meg az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot úgy, hogy $A(-1, \sqrt{2}) \cdot X = A(0, 0)$.
2. Az egész számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 5xy + x + y$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $1 \circ 4 = 25$.
- 5p b) Igazold, hogy $e = 0$ semleges elem a „ \circ ” műveletre nézve.
- 5p c) Határozd meg a szimmetrizálható elemeket a „ \circ ” műveletre nézve.

III. TÉTEL

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Legyen d az f függvény grafikus képének aszimptotája $+\infty$ felé. Határozd meg az f függvény grafikus képén azon pontok abszcisszáit, amelyekben a grafikus képhez húzott érintő párhuzamos d egyenessel!
- 5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex a $[0, \sqrt{3}]$ intervallumon!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cos x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^{\pi} \frac{f(x)}{e^x} dx = 0$.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$.